

素粒子論研究におけるコンピュータの利用

Study of Thermal Field Theory using Computer

横田 浩*

Hiroshi YOKOTA

I. はじめに

平成6年度文部省科学研究費補助金(奨励研究 A:No.06740231, 90万円)および平成7年度奈良大学特別研究費(30万円)の補助を受けて、「有限温度・有限密度における場の量子論の相転移」についての研究を行った(中川寿夫教授との共同研究)。これらの研究の成果については、研究会での口頭発表¹⁾や論文²⁾にて一部発表している。物理そのものの内容についてはそれらに譲るとして、本研究ノートでは特別研究費の研究報告を兼ねて、上記の補助を受けて購入したコンピュータやソフトウェアの研究における利用について報告する。

素粒子論などの(理論)物理学研究におけるコンピュータの利用は、大きく6つに分けられる。

- (1) 数値計算(数値積分等)
- (2) シミュレーション
- (3) 数式処理
- (4) 視覚化(グラフ化・アニメーション化等)
- (5) 文書作成(論文・OHP原稿等)
- (6) ネットワーク利用(情報交換・論文送付等)

上記利用の内、(2) シミュレーションは本研究では利用していない。(1) 数値計算については、本研究のものではないが本質的に同じ利用に関して、すでに別の機会³⁾に書いたので本研究ノートでは述べない。また、(5) 文書作成⁴⁾や(6) ネットワーク利用については述べる必要はないであろう。

従って、本研究ノートでは、(3) 数式処理と(4) 視覚化(ただし、グラフ化のみ)について報告する。数式処理およびグラフ化を行うためのソフトウェアとしては、Mathematica⁵⁾を利用した。

次節で必要な数式の準備を行い、III節で数式処理の例を、IV節でグラフ化の例について述べる。

II. 数式の準備

この節では、例として取り上げる数式についての準備を行う。数式の物理的意味は素粒子論の予備知識なしに説明することは困難であるので、本ノートでは数式の物理的意味については考えないものとする。

有限温度の場の理論で有用な(1-loopで改善された)有効ポテンシャルは、あるモデルでは以下の式で表される^{1),2),6)}。

$$\frac{\bar{V}}{T^4} \simeq \frac{x_0 x}{2\lambda} + \frac{x^2}{2} \left[-\frac{1}{64\pi^2} + \frac{1}{\pi^2 x^2} L_0\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2\pi^2 x} L_1\left(\frac{1}{x}\right) \right] + const. \quad (1)$$

ここで、 x は、

$$x = x_0 + \frac{\lambda}{32\pi^2} x (\ln x + \ln T^2 - 1) + \frac{\lambda}{2\pi^2} L_1\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2)$$

の解である。(ちなみに、 λ は結合定数、 T は環境の温度である。) 実際の変数 X と x_0 には

$$x_0 \equiv -\frac{1}{T^2} + \frac{1}{2}\lambda^2 X^2 \quad (3)$$

の関係がある。また、関数 L_0 、 L_1 は、

$$L_0\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \int_0^\infty k^2 dk \ln[1 - \exp\{-\sqrt{k^2 + x}\}] \quad (4)$$

$$L_1\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + x}} \frac{1}{\exp\{\sqrt{k^2 + x}\} - 1} \quad (5)$$

で与えられる。

温度 T を与えたとき、 X の変化に応じて有効ポテンシャル \bar{V} のふるまいを調べる必要がある。これらの式は解析的に扱うことができないので、以下の2通りの方法で調べる。

- (1) ニュートン法および数値積分による数値計算⁷⁾
- (2) ある種の近似²⁾ (物理的には高温展開)

数値計算は文献3)の方法で行うことになり、本ノートの範囲外である。しかしながら、発散の問題があり、一部手で評価すべき部分がある。ここに、数式処理での利用が生じる。この部分をIII節で取り上げることにする。

近似による場合には解析的な式になるので、Mathematicaですぐにグラフにすることができる。これはIV節で取り上げる。

III. 数式処理

手で評価をしなければならないのは、 x の実数部分が負になるときである。簡単のため $x = -1$ とする。この場合 L_1 は複素数になる。実数部分は、

$$\Re L_1(-1) = \frac{1}{2} \int_0^\infty k^2 f(k) dk \quad (6)$$

$$f(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \frac{1}{\exp\{\sqrt{k^2 - 1}\} - 1} & \text{for } k > 1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1 - k^2}} \frac{\sin \sqrt{1 - k^2}}{1 - \cos \sqrt{1 - k^2}} & \text{for } 1 > k \end{cases} \quad (7)$$

と書ける。従って、 $k \simeq 1$ 付近では主値積分が必要となる。 $0 < a < 1 < b$ なる a, b を適当に選んで、

$$2\Re L_1(-1) = \Pr \int_a^b k^2 f(k) dk + \int_0^a k^2 f(k) dk + \int_b^\infty k^2 f(k) dk \quad (8)$$

の3つに分ける。右辺第2、3項は数値積分で求められる^{3), 8)}。以下、第1項を考える。主値積分は、

$$\Pr \int_a^b k^2 f(k) dk = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{1-\epsilon} k^2 f(k) dk + \int_{1+\epsilon}^b k^2 f(k) dk \right] \quad (9)$$

で定義される。 $k = 1 - z^2$ または $k = 1 + z^2$ と変数変換をして、

$$\text{式(9)の第1項} = \int_{\sqrt{1-a}}^{\sqrt{\epsilon}} \frac{(1-z^2)^2}{\sqrt{2-z^2}} \frac{\sin(z\sqrt{2-z^2})}{1-\cos(z\sqrt{2-z^2})} dz \quad (10)$$

$$\text{式(9)の第2項} = 2 \int_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{b-1}} \frac{(1+z^2)^2}{\sqrt{2+z^2}} \frac{1}{\exp\{z\sqrt{2+z^2}\} - 1} dz \quad (11)$$

とする。 z は小さいので、被積分関数をテーラー展開して、適当な次数まで求めればよい。しかしながら、この式の展開は簡単ではない。そこで、この展開を Mathematica に実行させる。その経過を図1に示す。

g, h で被積分関数を定義し、**G, H** で展開を実行し、**IG, IH** で(不定)積分を実行している。**Series[f, {x, a, n}]** は、「関数 f を x に関して、 a のまわりで n 次まで展開せよ」という命令である。**Factor** は「因数分解せよ」という命令で、今の場合特に必要ない。しかし、この方が表示が見やすくなる。**Integrate[f, x]** は、「関数 f を x に関して不定積分せよ」という命令である。なお、**In[4]:=** の \backslash は、行が続いていることを示している。

従って、主値積分は

$$\begin{aligned} \Pr \int_a^b k^2 f(k) dk &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\epsilon}{1-a} - \frac{5}{6}(\epsilon - 1 + a) + \frac{13}{90} \{ \epsilon^2 - (1-a)^2 \} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \frac{b-1}{\epsilon} - \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} + \sqrt{\frac{b-1}{2}} + \frac{5}{6}(b-1-\epsilon) \\ &\quad \left. - \frac{7}{12\sqrt{2}} \{ \sqrt{(b-1)^3} - \sqrt{\epsilon^3} \} + \frac{13}{90} \{ (b-1)^2 - \epsilon^2 \} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b-1}{1-a} \right) + \sqrt{\frac{b-1}{2}} + \frac{5}{6}(b-a) \\ &\quad - \frac{7}{12\sqrt{2}} \sqrt{(b-1)^3} + \frac{13}{90} \{ (b-1)^2 - (1-a)^2 \} + \dots \quad (12) \end{aligned}$$

と求められるので、数値計算の結果を加えればよい。

Mathematica や REDUCE は、FORTRAN 形式で出力ができるので、数値計算へ移行するのは簡単である。

In[1]:=

$$g = 2 (1+z^2)^2 / (\text{Sqrt}[2+z^2] (\text{Exp}[z \text{Sqrt}[2+z^2]] - 1))$$

Out[1]=

$$\frac{2 (1 + z^2)^2}{(-1 + e^{z \text{Sqrt}[2 + z^2]}) \text{Sqrt}[2 + z^2]}$$

In[2]:=

$$G = \text{Factor}[\text{Series}[g, \{z, 0, 4\}]]$$

Out[2]=

$$(11520 - 5760 \text{Sqrt}[2] z + 19200 z^2 - 10080 \text{Sqrt}[2] z^3 + 6656 z^4 - 3420 \text{Sqrt}[2] z^5) / (11520 z)$$

In[3]:=

$$IG = \text{Integrate}[G, z]$$

Out[3]=

$$-\frac{z}{\text{Sqrt}[2]} + \frac{5 z^2}{6} - \frac{7 z^3}{12 \text{Sqrt}[2]} + \frac{13 z^4}{90} - \frac{19 z^5}{160 \text{Sqrt}[2]} + \text{Log}[z]$$

In[4]:=

$$h = \frac{(1-z^2)^2 \text{Sin}[z \text{Sqrt}[2-z^2]]}{(\text{Sqrt}[2-z^2] (1 - \text{Cos}[z \text{Sqrt}[2-z^2]]))}$$

Out[4]=

$$\frac{(1 - z^2)^2 \text{Sin}[z \text{Sqrt}[2 - z^2]]}{\text{Sqrt}[2 - z^2] (1 - \text{Cos}[z \text{Sqrt}[2 - z^2]])}$$

In[5]:=

$$H = \text{Factor}[\text{Series}[h, \{z, 0, 4\}]]$$

Out[5]=

$$\frac{2880 - 4800 z^2 + 1664 z^4}{2880 z}$$

In[6]:=

$$IH = \text{Integrate}[H, z]$$

Out[6]=

$$\frac{-5 z^2}{6} + \frac{13 z^4}{90} + \text{Log}[z]$$

IV. グラフ作成

この節では、近似を行った式でのふるまいを見るために、視覚化(グラフ化)する。近似すなわち高温展開した式は²⁾、式(1)から

$$\frac{\bar{V}}{T^4} \simeq \frac{1}{2\lambda} \left[x_0 x - \frac{\pi^2}{45} \lambda + \frac{\lambda}{24} x - \frac{\lambda}{24\pi} x \sqrt{x} + \dots \right] \quad (13)$$

で与えられる。 x は、式(2)、(3)から

$$x = -\frac{1}{T^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 X^2 + \frac{\lambda}{24} - \frac{\lambda}{8\pi} \sqrt{x} \quad (14)$$

の解、すなわち、

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\lambda}{8\pi} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{8\pi}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{2} \lambda^2 X^2 - \frac{\lambda}{24}\right)} \right] \quad (15)$$

である。

これらを元に Mathematica のグラフィックス機能を用いてグラフを作成すると、図2になる。ここでは、 $\lambda = 0.05$ とし、 $\bar{V} = \Re(\bar{V}(X) - \bar{V}(X=0))/T^4$ のグラフを作成している。

lam、b、c、sx はそれぞれ、 λ 、式(14)を \sqrt{x} の2次方程式とみたときの1次の係数、定数項、解(15)を表している。In[7]:=、In[8]:= では $\bar{V}(X=0)$ の値を計算している。次の In[9]:= (すなわち X=) は、以後の処理で $X=0$ という条件をはずすことを示している。Plot[f, {x, a, b}] は「関数 f を x が a と b の範囲でグラフにせよ」、Re[f] は「関数 f の実数部分を求めよ」、最後の Show[p1, p2, p3] は「p1、p2、p3 の3つのグラフを一緒に表示せよ」という命令である。

少々時間がかかる(ときがある)が、式と値を入力するだけでグラフができる。図2は、Macintosh での画面のハードコピーであるので、グラフが少しギザギザになっている。文献5) で与えたように PostScript ファイルにして出力すれば、(投稿用の)きれいな図ができあがる。

IV. おわりに

以上、素粒子論研究において数式処理ならびに視覚化のためにコンピュータを利用する場合について報告してきた。多くの場合、単純ではあるが、人が行くとミス(計算間違い)が起きやすい場合に利用されている。上記はそれらの例になる。一方、数式処理ソフトウェアがないと実質上不可能と思われるものもある。例えば、文献9) では、REDUCE¹⁰⁾ をフルに使用した。特に2つ目は、使用しなければ手に負えなかった。

今後も、数式処理ソフトウェア(Mathematica、REDUCE、Maple V¹¹⁾)などが、素粒子論を初めとして多くの研究分野で利用されていくものと思われる。

```

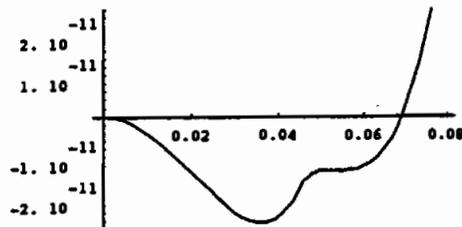
In[1]:=
lam = 0.05
Out[1]=
0.05
In[2]:=
x0 = - 1/T^2 + lam^2 X^2 / 2
Out[2]=
-T^-2 + 0.00125 X^2
In[3]:=
b = lam / (8 Pi)
Out[3]=
0.00625
Pi
In[4]:=
c = - x0 - lam/24
Out[4]=
-0.00208333 + T^-2 - 0.00125 X^2
In[5]:=
sx = ( -b + Sqrt[b^2 - 4 c] ) / 2
Out[5]=
(-0.00625 / Pi + Sqrt[(0.0000390625 / Pi^2 -
4 (-0.00208333 + T^-2 - 0.00125 X^2))] ) / 2
In[6]:=
v = x0 sx^2 / (2 lam) + sx^2 / 48 - sx^3 / (48 Pi)
Out[6]=
Power[(-0.00625 / Pi + Sqrt[(0.0000390625 / Pi^2 -
4 (-0.00208333 + T^-2 - 0.00125 X^2)]), 2] / 192 +
2.5 (-T^-2 + 0.00125 X^2)
Power[(-0.00625 / Pi + Sqrt[(0.0000390625 / Pi^2 -
4 (-0.00208333 + T^-2 - 0.00125 X^2)]), 2] -
Power[(-0.00625 / Pi + Sqrt[(0.0000390625 / Pi^2 -
4 (-0.00208333 + T^-2 - 0.00125 X^2)]), 3] / (384 Pi)

```

```

In[7]:=
X = 0
Out[7]=
0
In[8]:=
v0 = v
Out[8]=
(-0.00625 / Pi + Sqrt[(0.0000390625 / Pi^2 - 4 (-0.00208333 + T^-2)]))^2
-----
192
(-0.00625 / Pi + Sqrt[(0.0000390625 / Pi^2 - 4 (-0.00208333 + T^-2)]))
-----
3
-----
384 Pi
- (2.5 (-0.00625 / Pi + Sqrt[(0.0000390625 / Pi^2 -
4 (-0.00208333 + T^-2)]))^2) / T^2
In[9]:=
X = .
In[10]:=
T = 21.890
Out[10]=
21.89
In[11]:=
p1 = Plot[Re[V-V0], {X,0,0.08}]

```



```

Out[11]=
-Graphics-

```

In[12]:=

T = .

In[13]:=

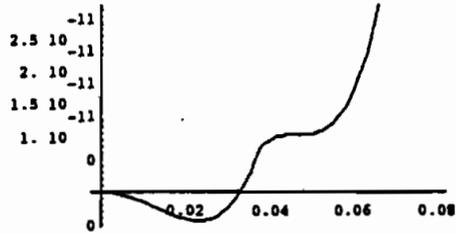
T = 21.895

Out[13]=

21.895

In[14]:=

p2 = Plot[Re[V-V0], {X,0,0.08}]



Out[14]=

-Graphics-

In[15]:=

T = .

In[16]:=

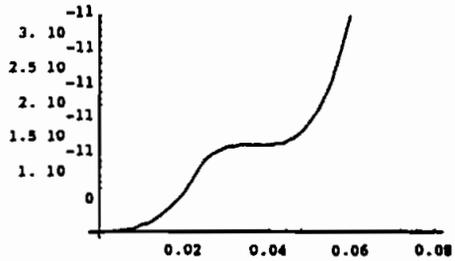
T = 21.900

Out[16]=

21.9

In[17]:=

p3 = Plot[Re[V-V0], {X,0,0.08}]

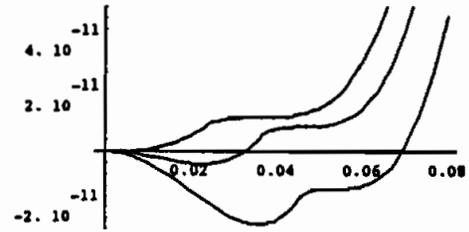


Out[17]=

-Graphics-

In[18]:=

Show[p1,p2,p3]



Out[18]=

-Graphics-

図2 (つづき)

註および参考文献

- 1) 京都大学基礎物理学研究所モレキュール型研究会「有限温度・有限密度の場の量子論とその応用」にて口頭発表(1994年8月3~5日および1995年8月28~30日)。発表内容は、下記の研究会報告に掲載されている。
中川寿夫, 横田: “有限温度における有効ポテンシャルの繰り込み群による改善”, 素粒子論研究 **90**, B15-B19 (1994);
中川寿夫, 横田: “有限温度における有効ポテンシャルの繰り込み群による改善 (II)”, 素粒子論研究 **92**, D26-D31 (1996)。
- 2) H. Nakagawa, H. Yokota: “RG improvement of the Effective Potential at Finite Temperature”, *Modern Physics Letters A* **11**, 2259-2269 (1996)。
- 3) 横田: “量子統計因子を含む積分の数値計算法”, 奈良大学情報処理センター年報 **2**, 12-25 (1991)。
- 4) 文書作成用ソフトウェアとしては、物理学の学界では \LaTeX がほぼ標準とされている。 \LaTeX については、下記を参照のこと。
横田: “文書処理システム \LaTeX による文書作成”, 奈良大学情報処理センター年報 **5**, 19-34 (1994)。
- 5) Mathematica は Wolfram Research 社の登録商標です。以下を参照のこと。
横田: “数学支援システム Mathematica と REDUCE によるデータ処理”, 奈良大学情報処理センター年報 **6**, 9-15 (1996)。
- 6) H. Nakagawa, H. Yokota: “Improving the Effective Potential at Finite Temperature”, *Memoirs of Nara University* **24**, 65-71 (1996)。
- 7) H. Nakagawa, H. Yokota: 準備中
- 8) ただし、これらの数値積分についても若干の技法が必要で、数式処理が必要となる。しかしながら、基本的には III 節と同じであるので、本研究ノートでは取り上げない。
- 9) H. Nakagawa, A. Niégawa, H. Yokota: “Non-Abelian Gauge Couplings at Finite Temperature in the General Covariant Gauge”, *Physical Review D* **38**, 2566-2578 (1988);
N. Ashida, A. Niégawa, H. Nakagawa, H. Yokota: “Real-Time non-Abelian Gauge Coupling at Finite Temperature: Temperature and Vertex-Configuration Dependences”, *Physical Review D* **44**, 473-487 (1991)。
- 10) REDUCE は RAND 社の登録商標です。文献5) を参照のこと。
- 11) Maple V は Waterloo Maple Software 社の登録商標です。本学にはありません。