Thirring模型の温度および密度依存性

—微分結合模型による解析—

Temperature and density dependences of the Thirring model

—Analysis based on a derivative-coupling model—

横田　浩*

Hiroshi Yokota

摘要

先の論文で、零温度・零密度で厳密に解くことができるThirring 模型において、熱力学ポテンシャルの密度依存性に関する過去の著者の結果と他の研究者の結果が異なるとの指摘を受けて再計算した結果、著者の計算に誤りがあること、さらに2ループでは他の研究者と結論が一致することを確認した。本論文では、その計算の誤りに付随して、n 点頂点関数（温度グリーン関数）の解に誤りがあるかどうかを、再検討した。その結果、過去の論文の解に誤りはないことを確かめた。

Ⅰ．はじめに

近年、有限温度・有限密度における場の量子論への関心が高まっている。その観点から、先の論文[1)]（以下、“論文Ⅰ”と引用する）では、零温度・零密度でも厳密に解ける（massless）Thirring 模型[2)]について、過去の筆者の論文[3)]（以下、“論文Ⅱ”と引用する）と他の研究者の論文[4)]との矛盾の指摘[5)]を受けて、再計算を行い矛盾は著者の計算の間違いによるものであることを確認した。しかしながら、論文Ⅰでは、熱力学ポテンシャルの密度依存性のみを考え、零温度（$T=0$）の場合を考えたことを別にしても、いくつか課題が残っていた。その1つに『熱力学ポテンシャルの2ループは、boson（ϕ, $\tilde{\phi}$）場のself-energy（$\Sigma_{\phi\phi}(K)$等）に伝播関数 $D(K)$を掛けてKで積分をした形であるので、$\Sigma_{\phi\phi}(K)$等が化学ポテンシャルμに依存しないという議論は誤りである可能性がある（少なくとも再確認する必要がある)。もし、そうであるのならば、一般の温度グリーン関数（n 点頂点関数）も修正が必要になる。』がある。

平成17年9月2日受理　*社会学部人間関係学科助教授

本論文では、この課題を検討する。その結果、『boson（ϕ, $\tilde{\phi}$）場のself-energy（$\Sigma_{\phi\phi}(K)$ 等）は温度Tにも化学ポテンシャルμにも依存しない。すなわち、この点について論文IIの修正は必要ない。』という結論が得られた。

以下、II節で、計算に必要な表式をまとめる。III節では、まず、boson場のself-energyの検討を行う。IV節で、2ループでの熱力学ポテンシャルをself-energyを用いて計算し、論文Iの結果と比較する。V節でまとめを行う。附録Aでは、self-energyの計算において、積分を正則化し発散をきちんと処理し実行する。附録Bでは、fermionのself-energy $\hat{\Sigma}_\psi$の表式を与える。

II. 実時間および虚時間形式での温度伝播関数

この節では、論文Iでは省略したが、以下の計算に必要な温度伝播関数（thermal propagater）などの表式をまとめる。論文I、IIと同様に、微分結合模型で解析する。

$$\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi + gJ^\rho J_\rho \quad (J^\rho \;=\; \bar{\psi}\gamma^\rho\psi) \tag{1}$$

$$\rightarrow \tilde{\mathcal{L}} \;=\; \bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi + \frac{1}{2}(\partial_\rho\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\rho\tilde{\phi})^2 + aJ^\rho\partial_\rho\phi + b\tilde{J}^\rho\partial_\rho\tilde{\phi} \tag{2}$$

$$\tilde{J}^\rho \;=\; \bar{\psi}\gamma^\rho\gamma^5\psi \;=\; \epsilon^{\rho\sigma}J_\sigma, \quad 2g \;=\; b^2 - a^2 \tag{3}$$

有限温度・有限密度における温度グリーン関数Gは、

$$G \equiv \frac{\mathrm{Tr}\left(T\psi\cdots\psi\bar{\psi}\cdots\bar{\psi}e^{-\beta(H-\mu Q)}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta(H-\mu Q)}\right)} \tag{4}$$

で与えられる。ここで、HはHamiltonianであり、$Q = \int dx^1\bar{\psi}\gamma^0\psi$はフェルミオン数演算子（fermion-number operator）である。μは密度に対応する化学ポテンシャルである。

温度グリーン関数の生成汎関数（generating functional）は、

$$Z(\bar{\xi},\xi) = Z(0,0)^{-1}\int[d_C\bar{\psi}][d_C\psi][d_C\phi][d_C\tilde{\phi}]\exp\left\{i\int_C(\tilde{\mathcal{L}} + \bar{\xi}\psi + \bar{\psi}\xi)d^2x\right\} \tag{5}$$

で、時間について$-\tau$と$-\tau - i\beta$を端点に持つ複素平面上に経路Cをとると、通常の経路積分の方法が使用できる。

$$Z(\bar{\xi},\xi) \;=\; \tilde{Z}(0,0)^{-1}\exp\left\{i\int_C\hat{\mathcal{L}}_{int}(z)d^2z\right\}Z_0(\bar{\xi},\xi,\eta,\tilde{\eta})\Big|_{\eta=\tilde{\eta}=0} \tag{6}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{int}(z) \;=\; \frac{\partial}{\partial z_\rho}\left[ag_{\rho\sigma}\frac{\delta}{i\delta\eta(z)} + b\epsilon_{\rho\sigma}\frac{\delta}{i\delta\tilde{\eta}(z)}\right]\cdot\frac{\delta}{i\delta\xi(z)}\gamma^\sigma\frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}(z)} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}Z_0(\bar{\xi},\xi,\eta,\tilde{\eta}) \;=\; \exp\Bigg\{-i\int_C\Bigg[&\bar{\xi}(x)S(x-y)\xi(y) + \frac{1}{2}\eta(x)D(x-y)\eta(y)\\ &+\frac{1}{2}\tilde{\eta}(x)D(x-y)\tilde{\eta}(y)\Bigg]d^2xd^2y\Bigg\}\end{aligned} \tag{8}$$

ここで、$\tilde{Z}(0,0)$は、$Z(\bar{\xi}=0,\xi=0)=1$と規格化するための因子である。また、$S(x-y)$、$D(x-y)$は、自由場の温度伝播関数で、

$$i\partial\!\!\!/\,S(x-y) \;=\; \delta(x-y) \tag{9}$$

$$-\Box D(x-y) = \delta(x-y) \tag{10}$$

の解である。$\delta(x-y)$ は、時間については経路C上で定義されたδ関数である。また、これらの温度伝播関数は、

$$S(x^0-y^0,x^1-y^1) = -e^{\beta\mu}S(x^0-i\beta-y^0,x^1-y^1) \tag{11}$$

$$D(x^0-y^0,x^1-y^1) = D(x^0-i\beta-y^0,x^1-y^1) \tag{12}$$

の境界条件（KMS条件[6)]）を満たす。

先進（advanced）および遅延（retarded）伝播関数との関係が簡単であるため、ここでは、実時間形式[7),8)]として閉時間経路形式[8)]を用いる。経路CはC_1（$-\tau\to\tau$），C_2（$\tau\to-\tau$），C_3（$-\tau\to-\tau-i\beta$）をとる。ここで、$\tau\to\infty$としたとき、外線を持つ温度グリーン関数においては経路C_3は考慮する必要はないことが知られている[9),10)]。そのため温度伝播関数は2×2の行列になる。fermion(ψ)の free propagaterは

$$S_{11}(P) = \left[\frac{1}{P^2+i\epsilon}+2\pi i\delta(P^2)n_F(p_0)\right]\not{P} \tag{13}$$

$$S_{12}(P) = -2\pi i\left[\theta(-p_0)-n_F(p_0)\right]\delta(P^2)\not{P} \tag{14}$$

$$S_{21}(P) = -2\pi i\left[\theta(p_0)-n_F(p_0)\right]\delta(P^2)\not{P} \tag{15}$$

$$S_{22}(P) = \left[\frac{-1}{P^2-i\epsilon}+2\pi i\delta(P^2)n_F(p_0)\right]\not{P} \tag{16}$$

$$n_F(p_0) \equiv \frac{\theta(p_0)}{e^{\beta(p_0-\mu)}+1}+\frac{\theta(-p_0)}{e^{-\beta(p_0-\mu)}+1} \tag{17}$$

boson（ϕ, $\tilde{\phi}$）のfree propagaterは

$$D_{11}(K) = \frac{1}{K^2+i\epsilon}-2\pi i\delta(K^2)n_B(k_0) \tag{18}$$

$$D_{12}(K) = -2\pi i\left[\theta(-k_0)+n_B(k_0)\right]\delta(K^2) \tag{19}$$

$$D_{21}(K) = -2\pi i\left[\theta(k_0)+n_B(k_0)\right]\delta(K^2) \tag{20}$$

$$D_{22}(K) = \frac{-1}{K^2-i\epsilon}-2\pi i\delta(K^2)n_B(k_0) \tag{21}$$

$$n_B(k_0) \equiv \frac{1}{e^{\beta|k_0|}-1} \tag{22}$$

一方、虚時間形式[7),11),12)]では、fermionのfree propagaterおよびbosonのfree propagaterはそれぞれ以下のように与えられる。経路Cは（$0\to-i\beta$）である。

$$S(P) = \frac{1}{\not{P}} = \frac{1}{P^2}\not{P} \tag{23}$$

$$D(K) = \frac{1}{K^2} \tag{24}$$

$$p_0 = (2n_p+1)\pi Ti+\mu, \qquad k_0 = 2n_k\pi Ti \tag{25}$$

ここで、n_p、n_kは整数である。

Ⅲ．ϕおよび$\tilde{\phi}$場の self-energy

この節では、温度グリーン関数（n 点頂点関数）に対する問題を再検討するために、ϕおよび$\tilde{\phi}$場のself-energyの温度・密度依存性を再計算する。実質的に同じなので、具体的な計算はϕ場の場合のみを示す。$\tilde{\phi}$場については、附録Aを参照のこと。

Ⅲ．A．実時間形式での計算

まず初めに、実時間形式（閉時間経路形式）で、self-energyの計算を行い、その温度・密度依存性について調べる。温度・密度依存性に関心があるので、零温度・零密度部分を除いたパート、すなわち、$\delta\Sigma^{11}_{\phi\phi}(K) = \Sigma^{11}_{\phi\phi}(K) - \Sigma^{11}_{\phi\phi}(K)\Big|_{T=\mu=0}$等を計算する。これらからは、新しい発散は生じない。例として、$\delta\Sigma^{11}_{\phi\phi}(K)$を計算する。なお、論文Ⅱとは i だけ定義が異なるが、本論文では、虚時間形式での定義と合わせるために通常の定義にしたがうことにする。

$$
\begin{aligned}
\delta\Sigma^{11}_{\phi\phi}(K) &= -a^2\int\frac{d^2P}{i(2\pi)^2}\mathrm{Tr}[\not{K}\not{P}\not{K}(\not{P}-\not{K})]\left[\left(\frac{1}{P^2+i\epsilon}+2\pi i\delta(P^2)n_F(p_0)\right)\right.\\
&\qquad\times\left(\frac{1}{(P-K)^2+i\epsilon}+2\pi i\delta((P-K)^2)n_F(p_0-k_0)\right)\\
&\qquad\left.-\frac{1}{P^2+i\epsilon}\frac{1}{(P-K)^2+i\epsilon}\right]\\
&= \frac{a^2}{\pi}\int d^2P\left[(P-K)\cdot K\delta((P-K)^2)n_F(p_0-k_0)\right.\\
&\qquad\left.-P\cdot K\delta(P^2)n_F(p_0)\right]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

右辺第１項は、係数a^2/π を除いて、

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\frac{1}{2|p-k|}\{(p_0-k_0)k_0-(p-k)k\}\{\delta(p_0-k_0-|p-k|)\\
&\qquad+\delta(p_0-k_0+|p-k|)\}n_F(p_0-k_0)\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}dp\frac{1}{2|p-k|}\left[\frac{k_0|p-k|-k(p-k)}{e^{\beta(|p-k|-\mu)}+1}-\frac{k_0|p-k|+k(p-k)}{e^{\beta(|p-k|+\mu)}+1}\right]\\
=&\ 2k_0\mu
\end{aligned}
\tag{27}
$$

同様に右辺第２項は、係数a^2/π を除いて、

$$
-\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\frac{1}{2|p|}(p_0k_0-pk)\{\delta(p_0-|p|)+\delta(p_0+|p|)\}n_F(p_0) = -2k_0\mu \tag{28}
$$

よって、$\delta\Sigma^{11}_{\phi\phi}(K)=0$となる[13),14)]。他の$\delta\Sigma^{ij}_{\phi\phi}(K)$も同様にして、０であることを示すことができる。例えば、

$$
\delta\Sigma^{12}_{\phi\phi}(K) = -a(-a)(2\pi i)^2\int\frac{d^2P}{i(2\pi)^2}(-1)\mathrm{Tr}[\not{K}\not{P}\not{K}(\not{P}-\not{K})]
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \times[\theta(p_0)-n_F(p_0)]\delta(P^2)[\theta(k_0-p_0)-n_F(p_0-k_0)]\delta((P-K)^2)\\
&= -ia^2\int d^2P\,[(P-K)^2\{(P-K)^2-2P^2-K^2\}+P^2(P^2-K^2)]\\
&\quad \times\delta(P^2)\delta((P-K)^2)[\theta(p_0)-n_F(p_0)][\theta(k_0-p_0)-n_F(p_0-k_0)]\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$\delta\Sigma^{ij}_{\tilde\phi\tilde\phi}(K)=0$ も同様に示すことができる。零温度・零密度の部分には、附録Aで与えるように、0ではない寄与があったが[3]、今の場合は発散しないので、$\delta\Sigma^{ij}_{\phi\phi}(K)$と同様に0となる。また、$\Sigma^{ij}_{\tilde\phi\phi}(K)$、$\Sigma^{ij}_{\phi\tilde\phi}(K)$も同様に0となる。

以上のことから、論文IIのn点頂点関数に関する部分については、修正する必要がないことがわかる。また、その結果を用いた準粒子に関する論文[15]の内容にも変更の必要はない。

これは論文Iでの指摘と矛盾しないのであろうか？ IV節との関連もあるが、論文Iにも書いたように熱力学ポテンシャルの計算には、虚時間形式が便利であり実時間形式での計算には（閉時間経路法に限らず）技巧が必要である。これは、熱力学ポテンシャルなどの計算では生成汎関数の分母$\tilde Z(0,0)$そのものを計算する必要があり、経路C_3の効果を無視できないことによる[9]。このため、上記の結果が直ちに実時間形式で計算した（2ループでの）熱力学ポテンシャルが0になることを意味するわけではない。

III. B. 虚時間形式での計算

ここでは、比較のため虚時間形式でself-energyを計算する。

$$
\hat\Sigma_{\phi\phi}(K) = -a^2\,T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p T\sum\!\!\!\!\!\!\int_q \beta\delta_{n_k+n_p,n_q}2\pi\delta(p+k-q)\frac{\mathrm{Tr}[\not K\not Q\not K\not P]}{P^2Q^2}
\tag{30}
$$

$$
T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p \equiv T\sum_{n_p=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}
\tag{31}
$$

虚時間形式では、零温度・零密度と有限温度・有限密度の部分を、実時間形式のように分離して表現することはできない。このため、発散の処理（繰り込み）が必要となる。ここでは、Pauli-Villars-Guptaの方法[16]で正則化し計算する。

$$
\begin{aligned}
\hat\Sigma_{\phi\phi}(K) &= -a^2\,T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p T\sum\!\!\!\!\!\!\int_q \beta\delta_{n_k+n_p,n_q}2\pi\delta(p+k-q)\\
&\qquad\times\left[\frac{\mathrm{Tr}[\not K\not Q\not K\not P]}{P^2Q^2}-\frac{\mathrm{Tr}[\not K(\not Q+M)\not K(\not P+M)]}{(P^2-M^2)(Q^2-M^2)}\right]\\
&= a^2M^2\,T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p T\sum\!\!\!\!\!\!\int_q \beta\delta_{n_k+n_p,n_q}2\pi\delta(p+k-q)\\
&\qquad\times\left[\frac{K\cdot P}{P^2(P^2-M^2)}-\frac{K\cdot Q}{Q^2(Q^2-M^2)}\right]\\
&= a^2M^2\left[T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p\frac{K\cdot P}{P^2(P^2-M^2)}-T\sum\!\!\!\!\!\!\int_q\frac{K\cdot Q}{Q^2(Q^2-M^2)}\right]\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{32}
$$

それぞれの積分は発散をしておらず、第１項と第２項でcancelする。よって、実時間形式の結果と一致する[17]。

$\hat{\Sigma}_{\bar{\phi}\bar{\phi}}(K)$については、具体的な計算は附録Aで与えることとし、結果のみを与える。

$$\hat{\Sigma}_{\bar{\phi}\bar{\phi}}(K) \;=\; -\frac{b^2K^2}{\pi} \tag{33}$$

となり、この場合も実時間形式と一致する（ただし、論文IIの結果とは係数 i だけ異なることに注意)。

self-energy $\hat{\Sigma}$ に対しては、実時間・虚時間とも同じ値を与え、当然の結果である。しかしながら、虚時間形式の場合、熱力学ポテンシャルの計算に対しては、論文Iと矛盾しているようにみえる。具体的な計算は次のIV節で与え検討するが、２ループの熱力学ポテンシャルは $\hat{\Sigma}_{\phi\phi}$ 等を用いた形式で書くことが出来ないことを示しているのであり、矛盾するものではない。

IV. ２ループ熱力学ポテンシャル $\Omega_1(T=0,\ \mu)$

ここでは、虚時間形式での２ループの熱力学ポテンシャルΩ_1の計算をself-energy $\hat{\Sigma}$ を用いた表式で実行する。ただし、論文Iとの比較のため最後に$T\to 0$とする。

２ループでの熱力学ポテンシャル$\Omega_1(T,\mu)$は、bosonのself-energyを用いて、

$$\begin{aligned}\Omega_1(T,\mu) \;&=\; -\frac{1}{2}T\sum\!\!\!\!\!\!\int_k T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p T\sum\!\!\!\!\!\!\int_q \beta\delta_{n_k+n_p,\ n_q}2\pi\delta(p+k-q)\\ &\qquad\times\left[a^2\frac{\mathrm{Tr}[\not{K}\not{Q}\not{K}\not{P}]}{K^2P^2Q^2}+b^2\frac{\mathrm{Tr}[\not{K}\gamma^5\not{Q}\not{K}\gamma^5\not{P}]}{K^2P^2Q^2}\right]\\ &=\; \frac{1}{2}T\sum\!\!\!\!\!\!\int_k D(K)\;\left[\hat{\Sigma}_{\phi\phi}(K)+\hat{\Sigma}_{\bar{\phi}\bar{\phi}}(K)\right]\end{aligned} \tag{34}$$

と、形式的に書くことができる。この場合は、III. B節の結果から直ちに分かるが発散項のみを与え、繰り込みの処理を行なえば、寄与はないことが分かる[18]。

また、２ループでの熱力学ポテンシャル$\Omega_1(T,\mu)$は、fermionのself-energy $\hat{\Sigma}_\psi$を用いて、

$$\Omega_1(T,\mu) \;=\; -\frac{g}{2}\,T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p \mathrm{Tr}\left[S(P)\;\hat{\Sigma}_\psi(P)\right] \tag{35}$$

と、形式的に書くこともできる。$S(P)$は(23)、$\hat{\Sigma}_\psi$は附録Bの(52)で与えられるから、

$$\begin{aligned}\Omega_1(T,\mu) \;&=\; \frac{g\mu}{2\pi}T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p \frac{2p_0}{p_0^2-p^2}\\ &\quad -\frac{g}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2kdk}{e^{\beta k}-1}\;T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p\left[\frac{1}{p_0+p+2k}\frac{1}{p_0+p}\frac{e^{\beta(p+2k+\mu)}+1}{e^{\beta(p+k+\mu)}+1}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{p_0-p-2k}\frac{1}{p_0-p}\frac{e^{\beta(p+2k-\mu)}+1}{e^{\beta(p+k-\mu)}+1}\right]\end{aligned} \tag{36}$$

右辺第２項$\Omega^{(2)}$は、

$$\begin{aligned}
\Omega^{(2)} &= -\frac{g}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kdk}{e^{\beta k}-1}\int_{-\infty}^{\infty}dp\frac{1}{2k} \\
&\quad\times\left[\left\{\frac{e^{\beta(p+\mu)}}{e^{\beta(p+\mu)}+1}-\frac{e^{\beta(p+2k+\mu)}}{e^{\beta(p+2k+\mu)}+1}\right\}\frac{e^{\beta(p+2k+\mu)}+1}{e^{\beta(p+k+\mu)}+1}\right. \\
&\quad\left.-\left\{\frac{1}{e^{\beta(p-\mu)}+1}-\frac{1}{e^{\beta(p+2k-\mu)}+1}\right\}\frac{e^{\beta(p+2k-\mu)}+1}{e^{\beta(p+k-\mu)}+1}\right] \\
&\overset{\beta\to\infty}{\to} -\frac{g}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dp \\
&\quad\times[-\theta(k)\theta(p+k+\mu)+\theta(p+\mu)\theta(k)-\theta(p+\mu)\theta(-k)\theta(-p-k-\mu)\} \\
&\quad-\theta(-k)\theta(\mu-p-k)-\theta(\mu-p)\theta(k)\theta(p+k-\mu)+\theta(\mu-p)\theta(-k)\}] \\
&= -\frac{g}{2\pi^2}\left[\mu^2-\Lambda^2\right]\qquad(\Lambda\to\infty)
\end{aligned}\tag{37}$$

となる。一方、第１項$\Omega^{(1)}$は、

$$\Omega^{(1)} = \frac{g\mu}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dp\left[\frac{1}{2|p|}\left\{|p|\frac{1}{e^{\beta(|p|-\mu)}+1}-|p|\frac{-e^{\beta(|p|+\mu)}}{e^{\beta(|p|+\mu)}+1}\right\}-\frac{1}{2}\right] = \frac{g\mu^2}{2\pi^2}\tag{38}$$

と計算される（$-1/2$は無限遠からの寄与である)。ゆえに、２ループの繰り込まれた熱力学ポテンシャル$\Omega_1^R(T=0,\mu)$は

$$\Omega_1^R(T=0,\mu) = 0\tag{39}$$

と求められる。これは、(34)からの結果と一致する。

(39)や(34)からの結果と論文Ｉの結果との不一致はどのように解釈すればよいのであろうか？ (30)を(32)のような正則化をせずに計算し、$e^{\beta k_0}=1$の条件を使用する前の式

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_{\phi\phi}(K) &= -\frac{a^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dp\left[(k_0-k)\frac{e^{\beta k_0}e^{\beta(p-\mu)}-e^{\beta(p+k-\mu)}}{[e^{\beta(p-\mu)}+1][e^{\beta(p+k-\mu)}+1]}\right. \\
&\quad\left.+(k_0+k)\frac{e^{\beta k_0}e^{\beta(p+k+\mu)}-e^{\beta(p+\mu)}}{[e^{\beta(p+\mu)}+1][e^{\beta(p+k+\mu)}+1]}\right]
\end{aligned}\tag{40}$$

を用いて(34)を計算すると、論文Ｉと同じ結果が得られる。同様に、附録Bの(52)に対しても$e^{\beta(p_0-\mu)}=-1$を使う前の式

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_{\psi}(P) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kdk}{e^{\beta k}-1}\left[\frac{\gamma^0+\gamma^1}{p_0+p+2k}\frac{e^{\beta(p_0-\mu)}e^{\beta k}e^{\beta(p+k+\mu)}-1}{e^{\beta(p+k-\mu)}+1}\right. \\
&\quad\left.+\frac{\gamma^0-\gamma^1}{p_0-p-2k}\frac{e^{\beta(p_0-\mu)}-e^{\beta k}e^{\beta(p+k-\mu)}}{e^{\beta(p+k-\mu)}+1}\right] \\
&\quad+\frac{\gamma^0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dq\left[\frac{e^{\beta(|q|-\mu)}+e^{\beta(p_0-\mu)}}{e^{\beta(|q|-\mu)}+1}+\frac{e^{\beta(|q|+\mu)}e^{\beta(p_0-\mu)}+1}{e^{\beta(|q|+\mu)}+1}\right]
\end{aligned}\tag{41}$$

を用いて、(35)を計算すると、論文Ⅰの結果と同じ結果になる。

これらは、２つの原因が考えられる。(i)(41) は$P^2=0$以外に極を持たないが、(52)は$P^2=0$以外に$p_0 \pm p \pm 2k=0$の極を持っていて、新しい極からの寄与を与える。(ii) $e^{\beta k_0}$や$e^{\beta(p_0-\mu)}$の有無によって、k_0やp_0積分時の無限遠からの寄与が異なる。

なお、(32)では、$e^{\beta k_0}=1$の利用の有無に関係なく０となっているが、$\Omega_1(T,\mu)$[(34)の最初の式の右辺] に対する正則化は、(32)の形にはならないので、fermion-loop部分のみの正則化では、$\Omega_1(T,\mu)$そのものに対する正則化には不十分である。つまり、Kの和・積分の発散の処理があるため、(32)から直ちに、$\Omega_1(T,\mu)=0$とすることはできない。

これらのことは、２ループの熱力学ポテンシャル$\Omega_1(T,\mu)$はself-energy $\hat{\Sigma}_{\phi\phi}$や$\hat{\Sigma}_{\psi}$等を用いて表現することが出来ないことを示している。

V．おわりに

以上、「熱力学ポテンシャルの２ループは、boson（ϕ, $\tilde{\phi}$）場のself-energy（$\Sigma_{\phi\phi}(K)$等）に伝播関数$D(K)$を掛けてKで積分をした形をしているので、論文Ⅰの結果から、$\Sigma_{\phi\phi}(K)$等が化学ポテンシャルμに依存しないという議論は誤りである可能性がある（少なくとも再確認する必要がある)。」との疑問から、再検討を行った。その結果、self-energy等には修正の必要はなく、論文Ⅱにおける一般の温度グリーン関数（n点頂点関数）の修正の必要もないことが確かめられた。

正確には、２ループ以上のグラフも考える必要があるが、bosonのn点頂点関数の場合は、bosonを外線に持ち、その外線とfermionループとの頂点においてWard-高橋恒等式［論文Ⅱの（A・１)］

$$
\begin{aligned}
& ia\int d^2\omega\; iS(x-\omega)\gamma^\mu iS(\omega-y)\cdot\partial^\omega_\mu\partial^z_\nu[iD(\omega-z)] \\
= \;& ia\{\partial^z_\nu[iD(x-z)]\cdot iS(x-y)-\partial^z_\nu[iD(y-z)]\cdot iS(x-y)\} \qquad (42)
\end{aligned}
$$

を用いると、２ループ以上では、互いにcancelするグラフの存在によって全体として０となることが示される[3]。すなわち、１ループのself-energyのグラフのみを考えればよいという論文Ⅱの結論は正しい。

一方、熱力学ポテンシャルに寄与する真空泡のグラフについては、cancelするかどうかは自明ではない。すなわち、“温度グリーン関数（n点頂点関数)”と“熱力学ポテンシャル”は同じように扱えない。この点への考慮が論文Ⅱでは不十分であった可能性が高い。熱力学ポテンシャル（の高次ループの寄与）については、別の機会に検討する予定である。

附録Ａ．正則化による発散の処理

ここでは、発散する積分をきちんと正則化を行って実行する。

初めに、実時間形式での$\Sigma_{\phi\phi}(K)$、$\Sigma_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}(K)$の$T=\mu=0$部分$\Sigma^0_{\phi\phi}(K)$、$\Sigma^0_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}(K)$を再計算する。ここでは、Pauli-Villars-Guptaの正則化[16]を用いる。また、一部に赤外発散が生ずるので微小質量κを導入して最後に$\kappa\to+0$とする。まず、ϕ場のself-energy $\Sigma^0_{\phi\phi}(K)$を計算する。

$$\begin{aligned}
\Sigma^0_{\phi\phi}(K) &= -a^2\int\frac{d^2P}{i(2\pi)^2}\left[\frac{\mathrm{Tr}[\not{K}(\not{P}+M)\not{K}(\not{P}-\not{K}+M)]}{[P^2+i\epsilon][(P-K)^2+i\epsilon]}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\mathrm{Tr}[\not{K}(\not{P}+M)\not{K}(\not{P}-\not{K}+M)]}{[P^2-M^2+i\epsilon][(P-K)^2-M^2+i\epsilon]}\right]\\
&= 2a^2M^2\int\frac{d^2P}{i(2\pi)^2}\left[\frac{K\cdot(P-K)}{[(P-K)^2-\kappa^2+i\epsilon][(P-K)^2-M^2+i\epsilon]}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{K\cdot P}{[P^2+i\epsilon][P^2-M^2+i\epsilon]}\right] \qquad (43)\\
&= 2a^2M^2\int\frac{d^2P}{i(2\pi)^2}\int_0^1 dx\frac{K\cdot(P-K)}{[(M^2+\kappa^2)x-\kappa^2-K^2+2K\cdot P-P^2]^2}-0\\
&= -2a^2M^2\frac{\Gamma(1)}{4\pi\Gamma(2)}\int_0^1 dx\frac{K\cdot(K-K)}{(M^2+\kappa^2)x-\kappa^2}\;=\;0 \qquad (44)
\end{aligned}$$

ここで、$\Gamma(n)$はガンマ関数である。(43)の右辺第2項は、Pについて奇関数であるので0となる。(43)の右辺第1項はκがないと、x積分の下限0で対数発散する（質量が0であることからくる赤外発散である）。しかしながら、(43)でP積分は（紫外）発散を含まないので、$P-K\to P$と変数変換できて、第2項同様に0とすることもできる（また、第2項とcancelすると考えることもできる）。いずれの場合も、$\Sigma^0_{\phi\phi}(K)=0$となる。

次に、$\tilde{\phi}$場のself-energy$\Sigma^0_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}(K)$を計算する。

$$\begin{aligned}
\Sigma^0_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}(K) &= -b^2\int\frac{d^2P}{i(2\pi)^2}\left[\frac{\mathrm{Tr}[\not{K}\gamma^5(\not{P}+M)\not{K}\gamma^5(\not{P}-\not{K}+M)]}{[P^2+i\epsilon][(P-K)^2+i\epsilon]}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\mathrm{Tr}[\not{K}\gamma^5(\not{P}+M)\not{K}\gamma^5(\not{P}-\not{K}+M)]}{[P^2-M^2+i\epsilon][(P-K)^2-M^2+i\epsilon]}\right]\\
&= 2b^2M^2\int\frac{d^2P}{i(2\pi)^2}\left[\frac{K\cdot(P-K)}{[(P-K)^2+i\epsilon][(P-K)^2-M^2+i\epsilon]}\right.\\
&\qquad-\frac{K\cdot P}{[P^2+i\epsilon][P^2-M^2+i\epsilon]}\\
&\qquad\left.-\frac{2K^2}{[P^2-M^2+i\epsilon][(P-K)^2-M^2+i\epsilon]}\right] \qquad (45)
\end{aligned}$$

となるが、最初の2項は$\Sigma^0_{\phi\phi}(K)$と同じであるので0となり、最後の項のみが残る。したがって、

$$\begin{aligned}
\Sigma^0_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}(K) &= -4b^2M^2K^2\int_0^1 dx\int\frac{d^2P}{i(2\pi)^2}\frac{1}{[M^2-K^2x+2xK\cdot P-P^2]^2}\\
&= -4b^2K^2M^2\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma(1)}{4\pi\Gamma(2)}\frac{1}{M^2-K^2x+x^2K^2}\\
&\overset{M\to\infty}{\to} -\frac{b^2}{\pi}K^2\int_0^1 dx\,1 \;=\; -\frac{b^2K^2}{\pi} \qquad (46)
\end{aligned}$$

と求められる。これが、定義による係数 i を除き論文IIの結果である。

最後に、虚時間形式での $\tilde{\phi}$ 場のself-energy $\hat{\Sigma}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}$ の計算を実行する。一部は、実時間形式と同様に $\hat{\Sigma}_{\phi\phi}(K)$ と同じで0となり、以下の項のみが残る。

$$\hat{\Sigma}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}(K) = -4b^2M^2K^2\, T\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_p T\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_q \frac{\beta\delta_{n_k+n_p,n_q}2\pi\delta(p+k-q)}{(P^2-M^2)(Q^2-M^2)} \tag{47}$$

発散は T 、μ にはよらないので、(47)で $M\to\infty$ を実行したとき残るのは、T 、μ にはよらない値である。そこで、(47)で $\beta\to\infty$ （$T\to 0$）とすると、

$$T\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_p \to \int\frac{d^2P}{i(2\pi)^2} \tag{48}$$

$$\beta\delta_{n_p+n_k,\, n_q} \to i2\pi\delta(p_0+k_0-q_0) \tag{49}$$

であるから、(45)の右辺第3項、すなわち(46)と同じ結果を与える。

附録B．fermionのself-energy $\hat{\Sigma}_\psi$

ここでは、fermionのself-energy $\hat{\Sigma}_\psi(P)$ の表式を与える。

$$\hat{\Sigma}_\psi(P) \equiv -2T\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_k T\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_q \beta\delta_{n_k+n_p,n_q}\, 2\pi\delta(p+k-q)\, \frac{\not{K}\not{Q}\not{K}}{K^2Q^2} \tag{50}$$

$$\hat{\Sigma}^a_\psi(P) = -\frac{a^2}{2}\hat{\Sigma}_\psi(P), \quad \hat{\Sigma}^b_\psi(P) = -\frac{b^2}{2}\hat{\Sigma}_\psi(P) \tag{51}$$

$\hat{\Sigma}^a_\psi$ は、a^2 に比例する項を表わす。$\hat{\Sigma}^b_\psi$ は γ^5 を含むが、$\hat{\Sigma}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}$ とは異なり、結合定数を除き $\hat{\Sigma}^a_\psi$ と同じ結果を与える。Kapustaのテキスト[12] の方法で計算すると、

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_\psi(P) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kdk}{e^{\beta k}-1}\left[\frac{\gamma^0+\gamma^1}{p_0+p+2k}\frac{e^{\beta(p+2k+\mu)}+1}{e^{\beta(p+k+\mu)}+1}\right. \\
&\qquad \left.+\frac{\gamma^0-\gamma^1}{p_0-p-2k}\frac{e^{\beta(p+2k-\mu)}+1}{e^{\beta(p+k-\mu)}+1}\right] - \frac{1}{\pi}\gamma^0\mu \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\left[\frac{\gamma_+p_+}{p_-+2k}\frac{e^{\beta(k+\mu)}}{e^{\beta(k+\mu)}+1} - \frac{\gamma_-p_-}{p_+-2k}\frac{e^{\beta(k-\mu)}}{e^{\beta(k-\mu)}+1}\right] \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{e^{\beta k}-1}\left[\frac{\gamma_+p_+}{p_++2k} - \frac{\gamma_-p_-}{p_--2k}\right] \\
\gamma_\pm &\equiv \gamma^0\pm\gamma^1, \quad p_\pm \equiv p_0\pm p
\end{aligned} \tag{52}$$

と求められる。なお、実時間形式で計算を行なうと、最後の形の式が得られる[19]。

注および参考文献

1）横田浩，奈良大学総合研究所所報 13（2005）29.

2）W. Thirring, Ann. Phys. (NY) 3 (1958) 91.
B. Klaiber, ***Boulder Lecture in Theoretical Physics*** (Gordon and Breach, New York, 1968), Vol. XA, P. 141.

3）H. Yokota, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 1450 [Errata : 81 (1989) 725].

4）F. Ruiz Ruiz and R. F. Alvarez-Estrada, Phys. Lett. **B182** (1986) 354 ; Phys. Rev. **D35** (1987) 3161.

5）I. Sachs and A. Wipf, Phys. Lett. **B317** (1993) 545 ; Ann. Phys. (NY) **249** (1996) 380.
M. V. Mañias, C. M. Naón and M. L. Trobo, Phys. Lett. B **416** (1998) 157.
R. F. Alvarez-Estrada and A. G. Nicola, Phys. Rev. D **57** (1998) 3618.

6）R. Kubo, J. Phys. Soc. Jpn. **12** (1957) 570.
P. C. Martin and J. Schwinger, Phys. Rev. **115** (1959) 1432.

7）N. P. Landsman and Ch. G. van Weert, Phys. Rep. **145** (1987) 141.

8）K.- C. Chou, Z. -B. Su, B. -L. Hao and L. Yu, Phys. Rep. **118** (1985) 1.

9）N. P. Landsman and Ch. G. van Weert, 論文 7).
A. C. Pearson, in *BANFF/CAP WORKSHOP ON THERMAL FIELD THEORY*,proceedings of the 3rd Workshop on Thermal Field Theories and Their Applications, (15-27 August 1993, Banff, Canada), Edited by F. C. Khanna, R. Kobes, G. Kunstatter and H. Umezawa (World Scientific, 1994), p. 83.
M. Le Bellac, ***Thermal Field Theories*** (Cambridge University Press, 1996).
等で議論されている。ただし、いずれも経路が必ずしも閉時間経路に限定していないためC_3の他にC_4も現れるが、議論の筋道は同じである。

10) A. Niégawa, Phys. Rev. **D40** (1989) 1199.
C_2が実軸を戻るのではなく、虚部が$-i\beta/2$を戻る経路での議論であるが、伝播関数については、C_1、C_2のみを考慮すればよいこと指摘している。

11) T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14** (1955) 351.
A. A. Abrikosov, L. P. Gprkov and J. E. Dzyaloshinski, ***Method of Quantum Field in Statistical Physics*** (Pergamon, Oxford, 1965).

12) J. Kapusta, ***Finite-temperature field theory*** (Cambridge University Press, 1989).

13) (26)の右辺第1項で，$P-K\to P$の変数変換を行なうと、$(P-K)\cdot K\,\delta\left((P-K)^2\right)n_F(p_0-k_0)\ \to P\cdot K\,\delta(P^2)n_F(p_0)$となり、第2項とcancelすることが、簡単に分かる。今の場合、積分が発散しないので、この変換は問題を起こさないが、虚時間形式との対応をみるため、忠実に積分を行なった。

14) (26)において$1/(P^2+i\epsilon)=\Pr[1/P^2]-i\pi\delta(P^2)$として、取り扱うべきであるが，この$\delta(P^2)$部分からの寄与が0となることは簡単にわかる。

15) N. Ashida, A. Niégawa, H. Nakkagawa and H. Yokota, Phys. Lett. B **236** (1990) 450 [Errata : **241** (1990) 644].

16) 論文Ⅰでは、運動量積分を［$-\Lambda$，Λ］でcutoffする処方を用いた。熱力学ポテンシャルの計算ではcutoffの方法で問題はなかったが、self-energyの計算では、(33)の下のコメントにもあるように問題が生ずる。そこで、本論文の一部では、論文Ⅱと同じPauli-Villars法の一種（Pauli-Villars-Gupta法）を利用する。
W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 434.
S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. **A66** (1953) 129.
九後汰一郎「ゲージ場の量子論Ⅱ」(培風館，1989）の第7章「くりこみ」.

17) 虚時間形式での $\hat{\Sigma}_{\phi\phi}(K)$ は、$k_0\to k_0+i\epsilon$の変換を行なうと、遅延（retarded）伝播関数$\Sigma^R_{\phi\phi}(K)$に解析接続される[7),12)]。一方、閉時間形式では遅延伝播関数は$\Sigma^R_{\phi\phi}(K)=\Sigma^{11}_{\phi\phi}(K)+\Sigma^{12}_{\phi\phi}(K)$で与えられる[7),8)]。いずれの場合も、$\Sigma^R_{\phi\phi}(K)=0$で一致している。

18) 論文Ⅱでは、この結果から寄与は0（すなわち、相互作用の影響はない）とした可能性も考えられるが、（詳細な計算ノートが残っていないため）断定はできない。いずれにしても、2ループの計算にお

いて、正しい計算をしていなかったことには変わりはない。

19) 注17) と同様に $\hat{\Sigma}_\psi(P)$ で $p_0 \to p_0 + i\epsilon$ とすると、遅延伝播関数 $\Sigma^R_\psi(P)$ に解析接続される。一方、閉時間形式において $\Sigma^R_\psi(P) = \Sigma^{11}_\psi(P) + \Sigma^{12}_\psi(P)$ を計算すると、同じ結果が得られる。