

硬熱ループ近似Dyson-Schwinger方程式に基づく
熱ゲージ場理論（熱QED/熱QCD）の相構造の研究
—解のゲージ依存性に関する分析—

Analysis of Phase Structures of Thermal Gauge Field Theories (Thermal QED/QCD) through the Hard Thermal Loop Dyson-Schwinger Equation
— On the Gauge Dependence of the Solution —

中川 寿夫*

Hisao Nakkagawa

概要

今回の研究の主たる目的は、improved ladder 積分核を採用した硬熱ループ近似 Dyson-Schwinger (DS) 方程式を用いてフェルミオン遅延質量関数 Σ_R を解くこと、および、その解のゲージ依存性の大きさについて分析することである。このノートでは、分析結果に関する preliminary な報告を行なう。

分析に用いたゲージは一般の covariant gauge の範囲内のもので、具体的には4種の gauge parameters の値、 $\xi = 0$ (Landau gauge), $\xi = 0.05$, $\xi = 0.10$, $\xi = 0.15$, に対して解を求めた。

得られた結果は、フェルミオン質量の自発的生成のメカニズム（相転移の次数）についてはゲージの取り方による相違はなく2次相転移であること、しかしその詳細である相転移温度 T_C や臨界指数の値等については大きなゲージ依存性がある、ということである。

Ward恒等式との整合性の度合いという観点からみれば、今まで多くの分析に採用されてきた Landau gauge ($\xi = 0$) は、他の ξ の値に対応するゲージに比してより整合性を有さないものである、ということで、今後の分析の進展に期するところが大きい。

1. 序

ゲージ場理論は環境の温度や粒子数密度に依存して豊富な相構造を有することが、徐々に明かにされつつある。しかしこうした事実の解明は、摂動計算に依拠した分析や格子QCD理論に基づくシミュレーションによる分析によるものが殆どであって、これらの処方に基づく分析のみでは相転移機構の詳細を理論的につきとめることがなかなかできない状況にある。こうした状況の中で、我々は Dyson-Schwinger (DS) 方程式による分析に注目した。DS方程式は、場の理論の範囲で厳密に導出される、非摂動論的な結論を得る為の基礎方程式であること、その積分核に対する近似が解析的処方に基づいて逐次的に改善可能であることが主たる理由である。

我々はまず、熱QEDにおいてフェルミオン質量の自発的生成を調べる為に、遅延質量関数 Σ_R に対するDS方程式を分析することにした。その為の第一ステップとして硬熱硬密度ループ近似の下で解析的に評価した「improved ladder積分核」を採用した分析を実行した。これはゲージボゾン（光子）伝播関数としては硬熱ループ再加算伝播関数を用いたうえで、梯子 (ladder) 近似積分核を採用するというものである。我々の分析の結果については既に数遍の論文の形で公刊している [1, 2] が、得られた結果はDS方程式に基づく従来の結果 [3] とは大きな差異があった。我々の結果については論文を参照して頂くとして、従来の分析との差異をもたらしたポイントをまとめると以下のようなものである：

- i) 正しく遅延質量関数 Σ_R に対するDS方程式を取り扱っていること、
- ii) Σ_R を不変関数 A, B, C (定義については下記 Eq.(1) 参照) の各々の imaginary part まで含めてきちんと分析したこと、
- iii) 硬熱ループ近似の下で解析的に評価した「improved ladder積分核」を採用したこと。

しかし、これまでの分析には重大な問題点が確かに存在している。それは考察したDS方程式で得られた結果のゲージ依存性に関する問題である：

Fermion 遅延質量関数 Σ_R は3つの不変関数 A, B, C を用いて

$$\Sigma_R(P) = (1 - A(P)) p_i \gamma^i - B(P) \gamma^0 + C(P) \quad (1)$$

と parametrize できるが、不変関数の1つ $A(P)$ の逆数は fermion 波動関数繰り込み定数 Z_2 そのものである。我々のものを含め従来のDS方程式を用いた分析はすべて ladder 近似積分核を用いて行われているが、この近似の下では vertex (頂点) は繰り込みを受けないので頂点繰り込み定数 Z_1 は自動的に $Z_1 = 1$ となる。

従って結果のゲージ不変性を担保する為には、得られた結果が $Z_2 = 1$ 、即ち、 $A(P) = 1$ となって Ward の恒等式 $Z_1 = Z_2$ を満足したものとなっていることが最低限求められる。得られた結果が $A(P) \neq 1$ であれば、その結果が明白にゲージ不変性と矛盾するものであることを意味し、従って得られた結果の物理的意味は不明ということになるからである。

幸いにして、真空（ゼロ温度）場の理論では、Landau gauge を採用した分析においては $A(P) = 1$ であることが保証されており [4]、その意味で、ladder 近似DS方程式そのものの問題は別にして、少なくとも Landau gauge を採用した分析にはそれなりの物理的意味を認めることができると考えられている。しかし、有限温度密度場の理論においてはこの保証は一切ない。現実には Landau gauge の下で実行した我々の分析結果は、 $A(P)$ は大きく 1 からずれていること、更には実数でさえないということを示している。即ち（Landau gauge の下での）有限温度密度QEDの ladder 近似DS方程式に基づく分析結果は、明白にゲージ不変性と矛盾したものであり、得られた結果の物理的意味は不明であるということになる。

その意味では上述した我々の分析結果も、「正しく」温度効果を取り込むことの重要性を示唆するという点においては大きな意味があるとしても、それでは我々の得た結果が物理的な真の結論なのかと問われれば、これまでの結果と同様の問題を含んだままであると言わざるを得ない点がある。

それでは、得られた結果はどの程度までゲージのとり方に依存するのであろうか？また、ladder 近似DS方程式の範囲内で、有限温度密度環境下で Ward の恒等式 $Z_1 = Z_2$ を満足するような解は存在するのか、そのような解を求めることが可能であるのか、そしてそのような解の述べた結論はどのようなものであるのか？

上記の問題意識の下、まずここでは一般の covariant gauge の下で、得られる解のゲージ依存性を具体的に調べてみる。その上で Ward の恒等式 $Z_1 = Z_2$ を満足する解の存在について探ることにする。用いるのは硬熱硬密度ループ近似の下で解析的に評価した「improved ladder 積分核」を用いた遅延質量関数 Σ_R に対するDS方程式である。なお、今回の再分析に際して、積分核中の singular 積分の実行に関する改良も合わせ行った。

2. 硬熱ループ近似 improved ladder DS方程式

この章では分析に用いる遅延質量関数 Σ_R に対する硬熱ループ近似DS方程式を提示し、次いで improved ladder 近似、および、硬熱ループ再加算光子伝播関数の（特に）ゲージ項の寄与について説明する。そのうえで、具体的に分析の対象となる Σ_R の不変関数 A , B , C に対する硬熱ループ近似 improved ladder DS方程式を与える。また、初期値の取り方等により複数の「解」が存在した場合に「真の解」を選択する為の用に供する為、得られたフェルミオン（電子）伝播関数 S_R に対する同じ近似の下での有効ポテンシャルを計算する。

2-1. 遅延質量関数 Σ_R に対する硬熱ループ近似DS方程式

閉経路(CTP)形式 massless 熱QEDにおいては、fermion(electron)遅延質量関数 Σ_R に対する硬熱ループ近似DS方程式は次式で与えられる [1]：

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma_R(P) = & -\frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \\
 \times [& * \Gamma_{RAA}^{\mu}(-P, K, P-K) S_{RA}(-K, K) * \Gamma_{RAA}^{\nu}(-K, P, K-P) * G_{RR, \mu\nu}(K-P, P-K) \\
 & + * \Gamma_{RAA}^{\mu}(-P, K, P-K) S_{RR}(-K, K) * \Gamma_{RAA}^{\nu}(-K, P, K-P) * G_{RA, \mu\nu}(K-P, P-K)] \quad (2)
 \end{aligned}$$

ここに、 $*G^{\mu\nu}$ は硬熱ループ再加算光子伝播関数を表し、その遅延($R \equiv RA$)成分および相関($C \equiv RR$)成分は以下で与えられる、

$$\begin{aligned}
 *G_R^{\mu\nu}(K) & \equiv *G_{RA}^{\mu\nu}(-K, K) \\
 & = \frac{1}{*\Pi_T^R(K) - K^2 - i\epsilon k_0} A^{\mu\nu} + \frac{1}{*\Pi_L^R(K) - K^2 - i\epsilon k_0} B^{\mu\nu} - \frac{\xi}{K^2 + i\epsilon k_0} D^{\mu\nu} \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *G_C^{\mu\nu}(K) & \equiv *G_{RR}^{\mu\nu}(-K, K) \\
 & = (1 + 2n_B(k_0)) [*G_R^{\mu\nu}(K) - *G_A^{\mu\nu}(K)] \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$n_B(k_0) = \frac{1}{\exp(k_0/T) - 1} \quad (5)$$

但し、 $*\Pi_L^R$ および $*\Pi_T^R$ は、それぞれ縦（電氣的）成分および横（磁氣的）成分の硬熱ループ遅延光子自己エネルギー [5] であり、 $n_B(k_0)$ はボーズ分布関数である。

また、上式で $A^{\mu\nu}$, $B^{\mu\nu}$, $D^{\mu\nu}$ は射影テンソルを表す[6]、

$$A_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - B_{\mu\nu} - D^{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu} = -\frac{\tilde{K}^\mu \tilde{K}^\nu}{K^2}, \quad D_{\mu\nu} = \frac{K^\mu K^\nu}{K^2} \quad (6)$$

ここに、 $\vec{K} = (k, k_0 \hat{k})$ ， $k = \sqrt{\vec{k}^2}$ であり $\hat{k} = \vec{k}/k$ は \vec{k} 方向の単位ベクトルである。

$S(-P, P) \equiv S(P)$ は full electron propagator を表し、その遅延($R \equiv RA$)成分および相関($C \equiv RR$)成分は次式で与えられる（但し、 $n_F(p_0)$ はフェルミ分布関数である）：

$$S_R(P) \equiv S_{RA}(-P, P) = \frac{1}{P + i\varepsilon\gamma_0 - \Sigma_R} \quad (7)$$

$$S_C(P) \equiv S_{RR}(-P, P) = (1 - 2n_F(p_0)) [S_R(P) - S_A(P)] \quad (8)$$

$$n_F(p_0) = \frac{1}{\exp(p_0/T) + 1} \quad (9)$$

ここに、 Σ_R は fermion(electron)遅延質量関数であり、Eq.(1)の parametrization の下で、スカラー不変関数 $A(P)$ ， $B(P)$ ， $C(P)$ をDS方程式を解いて決定することが本研究の目的である。既に述べたごとく $A(P)$ は electron wave-function renormalization constant（電子波動関数繰り込み定数）であり、ゼロ温度理論では Landau ゲージの下では $A = 1$ であることが保証されているが、有限温度場理論ではこの保証はない。また、 $M(P) \equiv C(P)/A(P)$ が興味を中心となる質量関数の役割を果たす量で、カイラル対称相では $M(P) = 0$ である。

最後に、 $^*\Gamma^\mu$ は硬熱ループ再加算頂点関数

$$\begin{aligned} ^*\Gamma_{a\beta\gamma}^\mu &= \gamma_{a\beta\gamma}^\mu + \delta \Gamma_{a\beta\gamma}^\mu \\ \gamma_{RAA}^\mu &= \gamma_{AAR}^\mu = \gamma^\mu, \text{ その他はすべて } 0 \end{aligned} \quad (10)$$

を表すが、今回の分析では第二項の $\delta \Gamma^\mu$ を無視する point 相互作用近似を採用する。

2—2. 不変関数 A ， B ， C に対する硬熱ループ近似 improved ladder DS方程式

今回の分析では fermion(electron)遅延質量関数 Σ_R に対する硬熱ループ近似 DS方程式、Eq.(2)、に対して2つの近似を行った：

i) point 相互作用近似

硬熱ループ再加算頂点関数 $^*\Gamma^\mu$ ，Eq.(10)，において第二項の $\delta \Gamma^\mu$ を無視し、point 相互作用に対応する tree 頂点関数 γ^μ のみを保持する。

これには2つの理由がある。1つは第二項は非局所相互作用項であり、この項を導入すると解析がきわめて複雑となって現在所有のコンピュータの能力を超える恐れがあることである。2つめの理由はより理論的なもので、この項を導入した際に生ずる恐れのある double counting problem を、数値解析においてどのように処理すれば良いのかという問題について明確な解答を得ていないことに起因している。

ii) Modified Instantaneous Exchange(MIE) 近似

硬熱ループ再加算光子伝播関数 $*G^{\rho\sigma}$ において、射影テンソル $A^{\mu\nu}$ に比例する縦 (=電氣的) 成分伝播関数 $*G_L^{\rho\sigma}$ (含む、硬熱ループ光子自己エネルギー $*\Pi_L$) に対しては遠隔相互作用 (Instantaneous Exchange (IE)) 近似 (運動量第零成分 \equiv エネルギーを 0 にセットする近似) を採用するが、その一方で、この近似の下では硬熱ループ効果が消失し massless propagation に帰着してしまう $B^{\mu\nu}$ に比例する横 (=磁氣的) 成分伝播関数 $*G_T^{\rho\sigma}$ (含む、硬熱ループ光子自己エネルギー $*\Pi_T$) および $D^{\mu\nu}$ に比例する本来 massless 項であるゲージ項に対してはこの近似をとらず本来の近接相互作用として取り扱う。

この理由は、横成分およびゲージ項成分伝播関数に対して IE 近似を採用することは、無矛盾には実行できないからである。詳細については論文 [2] を参照されたい。

以上の 2 つの近似を採用したとき、不変関数 A, B, C に対する硬熱ループ近似 improved ladder DS 方程式として以下を得る：

$$\begin{aligned}
 & p^2 [1 - A(P)] \\
 &= e^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \left[|1 + 2n_B(p_0 - k_0)| \text{Im}[*G_R^{\rho\sigma}(P-K)] \times \right. \\
 & \quad \left[\{K_\sigma P_\rho + K_\rho P_\sigma - p_0(K_\sigma g_{\rho 0} + K_\rho g_{\sigma 0}) - k_0(P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0}) + pkz g_{\sigma\rho} \right. \\
 & \quad \left. + 2p_0 k_0 g_{\sigma 0} g_{\rho 0}\} \frac{A(K)}{[k_0 + B(K) + i\varepsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right. \\
 & \quad \left. + \{P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0} - 2p_0 g_{\sigma 0} g_{\rho 0}\} \frac{k_0 + B(K)}{[k_0 + B(K) + i\varepsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right] \\
 & \quad + |1 - 2n_F(k_0)| *G_R^{\rho\sigma}(P-K) \times \\
 & \quad \text{Im} \left[\{K_\sigma P_\rho + K_\rho P_\sigma - p_0(K_\sigma g_{\rho 0} + K_\rho g_{\sigma 0}) - k_0(P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0}) + pkz g_{\sigma\rho} \right. \\
 & \quad \left. + 2p_0 k_0 g_{\sigma 0} g_{\rho 0}\} \frac{A(K)}{[k_0 + B(K) + i\varepsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right. \\
 & \quad \left. + \{P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0} - 2p_0 g_{\sigma 0} g_{\rho 0}\} \frac{k_0 + B(K)}{[k_0 + B(K) + i\varepsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right] \Big] \\
 & \hspace{15em} (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B(P) = & e^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \left[|1 + 2n_B(p_0 - k_0)| \text{Im}[*G_R^{\rho\sigma}(P-K)] \times \right. \\
 & \left. \left[|K_\sigma g_{\rho\sigma} + K_\rho g_{\sigma\sigma} - 2k_0 g_{\sigma\sigma} g_{\rho\sigma}| \frac{A(K)}{[k_0 + B(K) + i\varepsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + |2g_{\rho\sigma} 2g_{\sigma\sigma} - g_{\sigma\rho}| \frac{k_0 + B(K)}{[k_0 + B(K) + i\varepsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right] \right. \\
 & \left. + |1 - 2n_F(k_0)| *G_R^{\rho\sigma}(P-K) \times \right. \\
 & \left. \text{Im} \left[\frac{A(K)}{[k_0 + B(K) + i\varepsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \{K_\sigma g_{\rho\sigma} + K_\rho g_{\sigma\sigma} - 2k_0 g_{\sigma\sigma} g_{\rho\sigma}\} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{k_0 + B(K)}{[k_0 + B(K) + i\varepsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \{2g_{\rho\sigma} 2g_{\sigma\sigma} - g_{\sigma\rho}\} \right] \right] \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(P) = & -e^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} g_{\sigma\rho} \left[|1 + 2n_B(p_0 - k_0)| \text{Im}[*G_R^{\rho\sigma}(P-K)] \times \right. \\
 & \left. \frac{C(K)}{[k_0 + B(K) + i\varepsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} + |1 - 2n_F(k_0)| \times \right. \\
 & \left. *G_R^{\rho\sigma}(P-K) \text{Im} \left[\frac{C(K)}{[k_0 + B(K) + i\varepsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right] \right] \quad (13)
 \end{aligned}$$

これらの積分方程式は、不変関数 A , B , C にはそれぞれ実部と虚部とが存在することを考慮すれば、6個の未知関数に対する連立積分方程式となっており、これを解くことは上記2つの近似を採用したとしても依然として十分に困難を伴うものである。

2-3. フェルミオン（電子）伝播関数 S_R に対する有効ポテンシャル $V(S_R)$

連立積分方程式 Eqs. (11-13) は、初期値の取り方等によって、複数の「解」を有する可能性がある。複数の解が存在する際に、「真の解」を求める為には複数の解の各々に対し fermion propagator S_R に対する有効ポテンシャル $V(S_R)$ を計算し、それらの中で最低エネルギーを有するものを選択することが求められる。この為に、現在解析しているDS方程式と同じ近似レベルの範囲内での有効ポテンシャル $V(S_R)$ を求める必要があるが、それは次式で与えられる [7]：

$$\begin{aligned}
 V[S_R] = & i\text{Tr}[P S_R] + i\text{Tr} \ln [i S_R^{-1}] \\
 & - \frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \text{tr} [\gamma_\mu S_R(K) \gamma_\nu S_R(P) D_C^{\mu\nu}(P-K) \\
 & + \gamma_\mu S_C(K) \gamma_\nu S_R(P) D_R^{\mu\nu}(P-K) + \gamma_\mu S_R(K) \gamma_\nu S_C(P) D_A^{\mu\nu}(P-K)] \quad (14)
 \end{aligned}$$

ちなみに、第1、第2項は1ループ有効ポテンシャル、第3項は2ループ有効ポテンシャルに対応している。

3. DS方程式の解のゲージ依存性

前章で与えた不変関数 A , B , C に対する硬熱ループ近似 improved ladder DS方程式を、以下のような処方で数値的に解いた：

まず、不変関数 A , B , C は non-trivial な虚部を有することを想定する。

その上で、方程式の右辺の各未知関数に対して適当な試行関数をインプットし、それに対応する左辺の解を求め、次いで、求められた「解関数」を右辺に代入して対応する解を求める、という操作を繰り返す。この操作を安定な解が求まるまで繰り返すという、いわゆる、iteration method によって解を求めていく。ただし、この方法では、求められた解が最初にインプットした試行関数に依存する可能性が排除できない。そのため、種々の形の試行関数から出発して解を求めることを試みて、複数の解が存在しうる場合には、前章で説明したように、複数の解の各々に対し fermion propagator S_R に対する有効ポテンシャル $V(S_R)$ を計算し、それらの内で最低エネルギーを有するものを真の解として採用した。

ゲージについては、取り敢えず covariant gauge の範囲内で考察することとし、種々の ξ の値のうち、解が求まるものとして以下の4種のものを取り上げた：

$$\xi = 0 \text{ (Landau gauge)}, \quad \xi = 0.05, \quad \xi = 0.10, \quad \xi = 0.15$$

以下に、結果を与える。但し、ここに与える結果はすべて preliminary なものであることを断っておきたい、未だ、若干の解析上の不定性が排除しきれていない。

3-1. Landau gauge における結果

$M(P) \equiv C(P)/A(P)$ は種々の結合定数 α に対して図1の温度 T 依存性を示し、2次相転移を示すことがわかる。しかし、この結果をこのままで物理的に意味のある結果であると断定することはフェアではない。それは、図2に示すごとく、不変関数 $A(P)$ は明白に1から大きくずれており、その虚部の大きさも十分に大きなものであるからである。即ち、Landau gauge では明白に Ward の恒等式と矛盾した結果しか得られないということであり、得られた解に過度な物理的意味を付与することは差し控えるべきであろう。

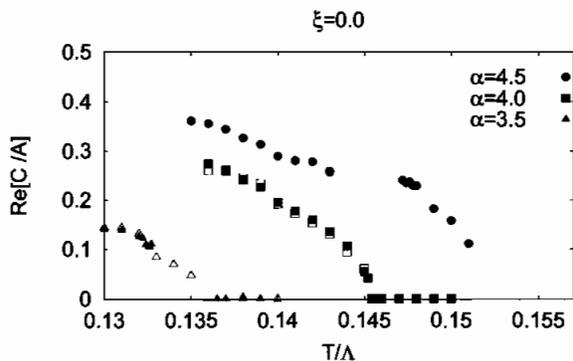


図1 Landau gauge ($\xi = 0$) の下での質量関数の温度依存性 $p_0 = 0, p = 0.1$

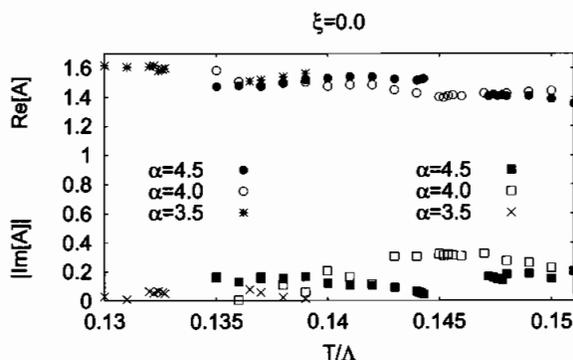


図2 Landau gauge ($\xi = 0$) の下での $A(P)$ の温度依存性 $p_0 = 0, p = 0.1$

3-2. $\xi = 0.10$ の結果

それでは不変関数 $A(P)$ の値はゲージを取り替えるとどの程度変化するのであろうか。ここでは $\xi = 0.10$ の場合の結果を与えてみよう。

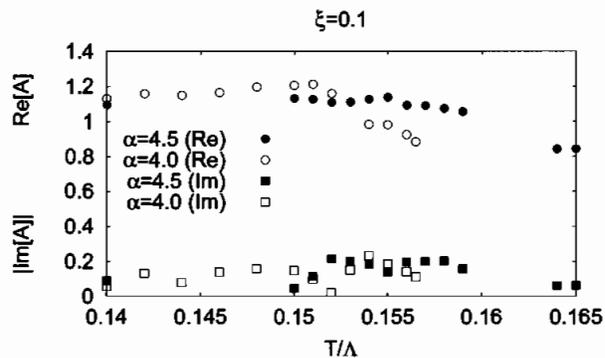


図3 $\xi = 0.1$ としたゲージの下での $A(P)$ の温度依存性 $p_0 = 0, p = 0.1$

図3にみるように、Landau gauge の場合と較べるとかなり1に接近していることがわかる：Re[A] が1に近いと共に、Im[A] も0に近付いていることが見て取れる。

このことは、適切なゲージを選択すれば Ward の恒等式と両立する解を得る可能性があることを示唆している。ただし、それは運動量に依存した複雑なゲージ $\xi = \xi(P)$ である可能性が高いと思われるが。

3-3. 解のゲージ依存性

最後に、解はどの程度の gauge parameter 依存性を有しているのか、という問題について、4種の ξ の値に対する解の比較を与えておこう。

簡単の為に、ここでは結合定数 $\alpha = 4.0$ の場合の分析結果を提示しておく：図4に質量関数 $M(P) \equiv C(P)/A(P)$ の温度 T 依存性を与える。

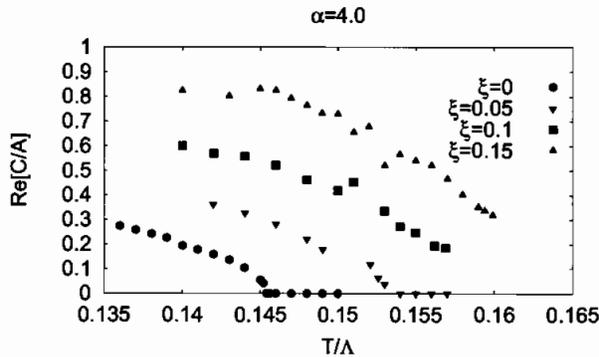


図4 結合定数 $\alpha=4.0$ とした場合の、質量関数の温度依存性を4種のゲージの下で比較した図 $p_0=0, p=0.1$

この図から、少なくとも相転移の次数についてはゲージ依存性はなく2次転移であることは物理的に有為な結論であることが想定できる。しかし、転移温度は明かに大きなゲージ依存性を有することが見て取れる。つまり、転移温度に関しては、適切なゲージを選択して Ward の恒等式と両立する解を得ない以上、理論の予言としての物理的な結論には到達できないということであろう。

参考の為に、図5および図6に波動関数繰り込み関数 $A(P)$ の gauge parameter 依存性を示しておく。図5には $A(P)$ の絶対値の値を、図6にはその実部および虚部の値を与えてある。これらの図からも、有限温度においては、ゼロ温度場理論の場合と異なり、Landau gauge が必ずしも「良い」ゲージとして振る舞っていないことが見て取れるであろう：明かに、Ward の恒等式と最も相容れないのは Landau gauge そのものである！

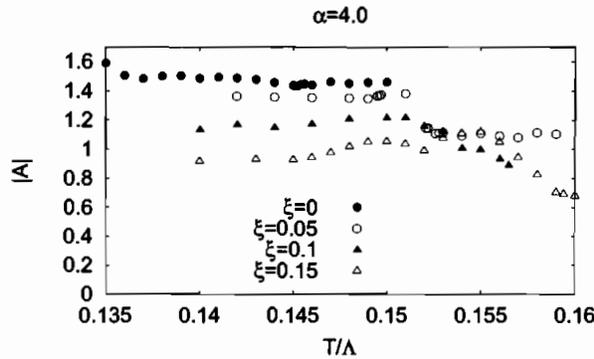


図5 結合定数 $\alpha=4.0$ とした場合の、 $A(P)$ の絶対値の温度依存性を4種のゲージ下で比較した図
 $p_0=0, p=0.1$

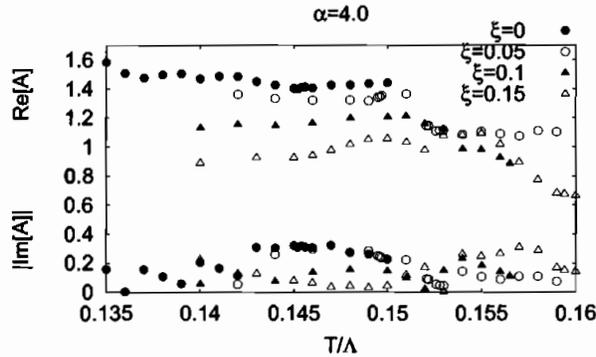


図6 結合定数 $\alpha=4.0$ とした場合の、 $A(P)$ の実部と虚部の温度依存性を4種のゲージの下で比較した図
 $p_0=0, p=0.1$

4. まとめと展望

今回の解析においては、温度効果のみを取り込んだフェルミオン質量の自発的生成を調べる為に、遅延質量関数 Σ_R に対する硬熱ループ近似 improved ladder DS方程式を数値的に解くことを実行した。この方程式の積分核には硬熱ループ再加算光子伝播関数 $*G^{\mu\nu}$ が現われるが、その横 (= 磁氣的) 成分伝播関数 $*G_T^{\mu\nu}$ は small energy—small momentum 領域で形式的に singular な振る舞いをする：解析的にはきちんとした収束積分であるにもかかわらず、数値積分として取り扱う際には発散積分として振る舞ってしまう領域が存在する。この領域での数値積分を適切に処理する処方箋が少々うるさくて、結果的に解の不安定性を引き起こしている。前章で、提示した結果が preliminary なものであることわった理由はここにある。現在、鋭意この singular 積分の処理について検討を進めており、安定な解を得る為の最終的な処方箋にはほぼ到達したという段階である。その上で得られるであろう解の性質、ゲージ依存性の問題を

回避できた結論については、早急に論文の形で公刊したいと考えている。

具体的に、DS方程式の解がどの程度ゲージのとり方に依存しているのか、については、大まか以下のようにまとめることができるであろう。

- ①相転移の回数についてはゲージ依存性はなく、2次転移である、
- ②相転移温度 T_c や臨界指数の値等についてはゲージ依存性が大きく現れる、
- ③有限温度の下では Landau gauge は必ずしも「良い」ゲージ選択となっておらず、むしろ Ward 恒等式の成立度という観点からは、考察したゲージの範囲内では worst である。

以上を踏まえた上で、現時点で得られている確実な結論は、温度に依存した（粒子数密度ゼロの下で）massless QED(QCD) のカイラル相転移は2次相転移である、ということである。しかし、相転移温度を決定する為には、適切なゲージを探して Ward の恒等式と両立する解を得る事が必要であり、そのような解を得ることができたとき始めて、理論の予言としての物理的相転移温度を決定できるであろうし、また温度効果のサイズに関してもきちんとした発言が可能になるであろう。

次なるねらいは、当然ながら対象をQCDに広げたいので、i) $A(P) = 1$ を満足する解を求めること、ii) 密度効果を取り込んだ解析を実行して、温度-密度面内での相転移図を完成させること、特に、tri-critical point の存在に関して明確な結論を得ること、iii) 超伝導相との間の共存関係を検討すること、そしてiv) 強磁性相の可能性を分析した上で、強磁性相と他の諸相との間の共存関係を明かにすることである。

i)、ii)、iii) については現在の処方と同じものでそのまま実行可能であり、すでに形式的な分析は完了している。上に述べた singular 積分に関する処方箋が完成すれば、容易に展開できるであろう。iv) については、いま少し新たな発想の下での検討が求められると思われるので、様々なアプローチを試みつつ問題の核心を捕らえる分析方法、あるいは、物理量を探ることに精力を注ぎたい。

最後に、この研究ノートにまとめた内容は、本学社会学部 横田浩、同 吉田光次の両氏との共同研究により得られた知見をまとめたものであるということを付記しておきたい。

また、この研究は、部分的に平成16年度奈良大学研究助成をうけて実行されたものである。記して感謝したい。

References

- [1] Y. Fueki, H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, *Prog. Theor. Phys.* **110**,777 (2003);
H. Nakkagawa, H. Yokota, K. Yoshida and Y. Fueki, *Pramana—J. of Phys.* **60**,1029 (2003).
- [2] Y. Fueki, H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, *Prog. Theor. Phys.* **107**,979 (2002)
- [3] K. Fukazawa, T. Inagaki, S. Mukaijima and T. Muta, *Prog. Theor. Phys.* **105**,979 (2001),
and references therein.
- [4] See, e.g., T. Maskawa and H. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **52**, 1326 (1974);
Prog. Theor. Phys. **54**, 860 (1975).
- [5] V. V. Klimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **33**,934 (1981); *Sov. Phys. JETP* **55**, 199 (1982);
H. A. Weldon, *Phys. Rev.* **D26**, 1394 (1982); *Phys. Rev.* **D26**, 2789 (1982).
- [6] H. A. Weldon, *Ann. Phys. (N.Y.)* **271**, 141 (1999).
- [7] J. M. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, *Phys. Rev.* **D10**, 2428 (1974).