

フェルミ流体理論に基づくクォーク物質中の磁気感受率

Magnetic susceptibility in quark matter within the Fermi liquid theory

中川 寿夫*・横田 浩*・吉田 光次**

Hisao NAKKAGAWA, Hiroshi YOKOTA, Koji YOSHIDA

I. はじめに

近年、コンパクト星などでの強磁場の起源に興味を持たれている。起源の1つとして、クォーク物質中でのスピン偏極の自発的破れが研究されている。巽ら¹⁾は、クォーク物質中でのスピン偏極の自発的破れの可能性を、フェルミ流体理論に基づいた1粒子交換（以下、OGE [one-gluon-exchange] と記す）相互作用による磁気感受率（磁化率）の分析で指摘した。しかしながら、フェルミ流体理論による分析と主張してはいるが、計算の途中で異なる極限での表式を用いている。そのため、得られた結果が正しい結論を与えているとは言い難い。

この論文の目的は、フェルミ流体理論から導出される表式に忠実な計算を行い、理論に基づく結果を求めることである。第2節で、理論に基づいて磁気感受率の導出を行う。第3節で、巽らの結果との比較と今後の課題をまとめる。附録では、巽らの極限で計算した結果を示す。

本論文は、平成20年度奈良大学研究助成の補助を受けて行った研究の成果の一部である。

II. フェルミ流体理論に基づく磁気感受率（磁化率）

初めに、フェルミ流体理論²⁾に基づいて導出された表式^{3),4)}を簡単にまとめる。

フェルミ流体理論では、磁気感受率 χ_M は、Landau parameter f を用いて以下のように与えられる。

$$\left(\frac{\chi_M}{\chi_{Pauli}}\right)^{-1} = 1 + \frac{N_c k_F \mu}{\pi^2} \left(-\frac{1}{3} f_1^s + f_0^a\right) \quad (1)$$

$$f_1^s = 3 \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}{4\pi} \cos \theta_{\mathbf{k}\mathbf{q}} f_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^s \Big|_{|\mathbf{k}|=|\mathbf{q}|=k_F} \quad (2)$$

$$f_0^a = \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{q}}}{4\pi} f_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^a \Big|_{|\mathbf{k}|=|\mathbf{q}|=k_F} \quad (3)$$

$$f_{\mathbf{k}\xi, \mathbf{q}\xi'} = f_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}^s + \xi \xi' f_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}^a \quad (4)$$

ここで、 k_F はフェルミ運動量である。

フェルミ流体理論では $f_{k\xi, q\xi'}$ は、バーテックス関数 $\Gamma_{\xi, \xi'}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ のフェルミ面上でのある極限と関係している⁴⁾。極限のとりかたは2つある。 $P = K - Q$ としたとき、先に $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ としその後で $p_0 \rightarrow 0$ とした Γ^ω と、先に $p_0 \rightarrow 0$ としその後で $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ とした Γ^k であり、最低次を除いて両者は一致しない。Landau parameter f は、“非物理的な過程”である Γ^ω と結びついており、“物理的な過程”である Γ^k とは直接関係していないことに注意する必要がある⁴⁾。 Γ^k は、いわゆる前方散乱振幅と解釈できるという意味で“物理的な過程”である。ところが、巽ら¹⁾は、Landau parameter として Γ^k を用いて分析を行っている。明らかにこの分析には問題がある。

OGE 相互作用におけるバーテックス関数 $\Gamma_{\xi, \xi'}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ は散乱振幅 $M_{k\xi, q\xi'}$ に等しく、以下のよう
に与えられる^{2), 3)}。

$$f_{k\xi, q\xi'} = \frac{m}{E_k} \frac{m}{E_q} \Gamma_{\xi, \xi'}^\omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \quad (5)$$

$$M_{k\xi, q\xi'} = -g^2 \frac{1}{N_c^2} \text{tr} \left(\frac{\lambda_\alpha}{2} \frac{\lambda_\alpha}{2} \right) M_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \xi; \mathbf{q}, \xi') D^{\mu\nu}(K - Q) \quad (6)$$

$$M_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \xi; \mathbf{q}, \xi') = \frac{1}{4m^2} \text{tr} \left[\gamma_\mu (\not{K} + m) P(a(\mathbf{k})) \gamma_\nu (\not{Q} + m) P(a'(\mathbf{q})) \right] \quad (7)$$

$$P(a(\mathbf{k})) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \not{a}) \quad (8)$$

$$a_0 = \xi \frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{k}}{m}, \quad \mathbf{a} = \xi \left[\hat{\mathbf{z}} + \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{k})}{m(E_k + m)} \right] \quad (9)$$

$$D^{\mu\nu}(P) = \frac{-1}{G - P^2} P_T^{\mu\nu} + \frac{-1}{F - P^2} P_L^{\mu\nu} - \frac{\alpha}{P^2} \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \quad (10)$$

$$P_T^{00} = P_T^{0i} = P_T^{i0} = 0, \quad P_T^{ij} = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{|\mathbf{p}|^2} \quad (11)$$

$$P_L^{\mu\nu} = \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} - g^{\mu\nu} - P_T^{\mu\nu} \quad (12)$$

$$F(p_0, |\mathbf{p}|) = -2m^2 \frac{P^2}{|\mathbf{p}|^2} \left[1 - \frac{p_0}{|\mathbf{p}|} \ln \left(\frac{p_0 + |\mathbf{p}|}{p_0 - |\mathbf{p}|} \right)^2 \right] \quad (13)$$

$$G(p_0, |\mathbf{p}|) = m^2 - \frac{1}{2} F(p_0, |\mathbf{p}|) \quad (14)$$

ここで、 $a_\mu(\mathbf{k})$ は spin vector であり、 $P(a(\mathbf{k}))$ は Projection operator である。なお、On-shell では、 $M_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = 0$ であるため、準粒子相互作用によって記述されるすべての物理量はゲージパラメータ α によらない（すなわち、ゲージ不変である）。

以下で、フェルミ流体理論⁴⁾に基づいて磁気感受率を求める。すなわち、先に $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ を実行し、その後で $p_0 \rightarrow 0$ を実行する。Debye 質量を m_D とする。

$$F \rightarrow \frac{2}{3} m^2 = \frac{1}{3} m_D^2, \quad G \rightarrow \frac{2}{3} m^2 = \frac{1}{3} m_D^2 \quad (15)$$

$$D^{\mu\nu}(P) = \frac{-1}{P^2 - \frac{1}{3} m_D^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \right) - \frac{\alpha}{P^2} \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 M_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= \frac{1}{2m^2} [2m^2 - (K \cdot Q) - m^2(a \cdot a') - 2(K \cdot a)(Q \cdot a')] \\
 &= \frac{1}{2m^2} [2m^2 - k_0q_0 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) + \xi\xi' M^a]
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 M^a &= m^2 - (\hat{z} \cdot \mathbf{k})(\hat{z} \cdot \mathbf{q}) + \frac{1}{(E_k + m)(E_q + m)} \{m(E_k + m)(\hat{z} \cdot \mathbf{q})(\hat{z} \cdot \mathbf{q}) \\
 &\quad + m(E_q + m)(\hat{z} \cdot \mathbf{k})(\hat{z} \cdot \mathbf{k}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})(\hat{z} \cdot \mathbf{k})(\hat{z} \cdot \mathbf{q})\}
 \end{aligned} \tag{18}$$

である。

$$C_g = g^2 \frac{1}{N_c^2} \text{tr} \left(\frac{\lambda_a \lambda_a}{2} \right) = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} g^2 \tag{19}$$

であるので、Landau parameter f は、以下のように求められる。

$$f_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^s = \frac{C_g}{2E_k E_q} \frac{2m^2 - k_0q_0 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})}{p_0^2 - p^2 - \frac{1}{3}m_D^2} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^a &= \frac{C_g}{2E_k E_q} \left[m^2 - (\hat{z} \cdot \mathbf{k})(\hat{z} \cdot \mathbf{q}) + \frac{m(\hat{z} \cdot \mathbf{k})^2}{E_k + m} + \frac{m(\hat{z} \cdot \mathbf{q})^2}{E_q + m} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})(\hat{z} \cdot \mathbf{k})(\hat{z} \cdot \mathbf{q})}{(E_k + m)(E_q + m)} \right] \frac{1}{p_0^2 - p^2 - \frac{1}{3}m_D^2}
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$-\frac{1}{3}f_1^s = -\frac{C_g}{8E_F^2 k_F^4} \left(m^2 + \frac{1}{6}m_D^2 \right) \left[2k_F^2 + \left(k_F^2 + \frac{1}{6}m_D^2 \right) \ln \frac{\frac{1}{6}m_D^2}{2k_F^2 + \frac{1}{6}m_D^2} \right] \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 f_0^a &= \frac{C_g}{4E_F^2} \left[-\frac{1}{3} + \frac{k_F^2 + \frac{1}{6}m_D^2}{3(E_F + m)^2} + \frac{1}{2k_F^2} \left\{ m^2 - \frac{1}{3} \left(k_F^2 + \frac{1}{6}m_D^2 \right) + \frac{2}{3}m(E_F - m) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{3(E_F + m)^2} \left(k_F^2 + \frac{1}{6}m_D^2 \right)^2 \right\} \ln \frac{\frac{1}{6}m_D^2}{2k_F^2 + \frac{1}{6}m_D^2} \right]
 \end{aligned} \tag{23}$$

よって、磁気感受率は

$$\left(\frac{\chi_M}{\chi_{Pauli}} \right)^{-1} = 1 + \frac{N_c k_F \mu}{\pi^2} \left(-\frac{1}{3}f_1^s + f_0^a \right) \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{N_c \mu C_g}{12\pi^2 E_F^2 k_F} \left[m(2E_F + m) + \frac{1}{3}\kappa(E_F^2 + mE_F - 2m^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6}\kappa \left\{ 2E_F^2 + 4mE_F - 3m^2 + \frac{2}{3}\kappa(E_F^2 + E_F m - 2m^2) \right\} \ln \frac{\kappa}{6 + \kappa} \right]
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\kappa = \frac{m_D^2}{2k_F^2} \tag{26}$$

と求められる。

III. 2つの「磁気感受率」の比較と今後の課題

この節では、第2節で求めた磁気感受率と巽らの「磁気感受率」を比較する。巽ら²⁾の「磁気感受率」は、結果のみを書くと、

$$\left(\frac{\chi_M}{\chi_{Pauli}} \right)^{-1} = 1 - \frac{C_g N_c \nu}{12\pi^2 E_F^2 k_F} \left[m(2E_F + m) + \frac{1}{2}(E_F^2 + 4E_F m - 2m^2)\kappa \ln \frac{\kappa}{2} \right] \tag{27}$$

である（第2節と同じ次数までの結果の導出は附録で行う）。

式(25)と式(27)を比較すると明らかなように、両者は異なる。また、最終結果には対数発散は現れていないが、附録で示したように A^s と A^a のそれぞれで対数発散が現れる。一方、第2節で見たように、われわれの計算においては、一切発散は現れない。論文2)の結論は再検討が必要である。

$A = \Gamma^k$ と $f = \Gamma^m$ は、無関係ではなく、フェルミ流体理論では以下の関係式で結びついている⁴⁾。

$$\begin{aligned} A_{k\xi, q\xi'} &= f_{k\xi, q\xi'} - \sum_{\xi''} \int f_{k\xi, p\xi''} A_{p\xi'', q\xi'} \frac{d\Omega'}{4\pi} \\ &= f_{k\xi, q\xi'} - \int \left\{ f_{kp}^s A_{pq}^s + \xi\xi' f_{kp}^a A_{pq}^a \right\} \frac{d\Omega'}{4\pi} \end{aligned} \quad (28)$$

A, f をルジャンドル関数 $P_\ell(\cos\theta)$ を用いて展開すると、両者の展開係数の間の関係が得られる。

$$A(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) A_\ell P_\ell(\cos\theta) \quad (29)$$

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f_\ell P_\ell(\cos\theta) \quad (30)$$

すなわち、すべての ℓ で

$$f_\ell = \frac{A_\ell}{1-A_\ell}, \quad A_\ell = \frac{f_\ell}{1-f_\ell} \quad (31)$$

が成立する。しかしながら、今の場合、 A は対数発散を持つが、 f は発散しないので、 f と A はこの関係を満たさない。現時点では、これらの原因などの物理的解釈はできていない。これらは、今後の課題である。

附録. Γ^k を用いた計算

ここで、Landau parameter (Γ^m の場合と区別するため A と表記する)が Γ^k であるとしたときの計算を簡単に与える。ゲージ粒子の伝播関数 $D^{\mu\nu}(P)$ は、

$$F \rightarrow \frac{1}{2}m^2 = m_D^2, \quad G \rightarrow 0 \quad (32)$$

$$D^{\mu\nu}(P) = \frac{1}{P^2 - \sigma^2} P_T^{\mu\nu} + \frac{1}{P^2 - m_D^2} P_L^{\mu\nu} - \frac{\alpha}{P^2} \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \quad (33)$$

となる。 $P_T^{\mu\nu}$ 項にはDebye質量がないため発散が生じる。そこで、無限小のcutoff parameter σ を導入する。主な結果をまとめると以下ようになる。

$$A_1^s = \frac{3C_g}{8E_F^2 k_F^2} \left[2m^2 + k_F^2 \kappa - k_F^2 \ln \frac{\epsilon}{2} + \left\{ E_F^2 + \left(E_F^2 + \frac{k_F^2}{2} \right) \kappa + \frac{k_F^2}{2} \kappa^2 \right\} \ln \frac{\kappa}{2 + \kappa} \right] \quad (34)$$

$$A_0^a = -\frac{C_g}{8E_F^2 k_F^2} \left[\frac{4}{3} m(E - m) + k_F^2 \ln \frac{\epsilon}{2} - \frac{2}{3} \kappa (E_F - m)^2 - \left\{ E_F^2 + \frac{1}{6} \kappa (7E_F^2 - 8mE_F + m^2) + \frac{1}{3} \kappa^2 (E_F - m)^2 \right\} \ln \frac{\kappa}{2 + \kappa} \right] \quad (35)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma^2}{2k_F^2}, \quad \kappa = \frac{m_D^2}{2k_F^2} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\chi_M}{\chi_{Pauli}} \right)^{-1} &= 1 + \frac{N_c k_F \mu}{\pi^2} \left(-\frac{1}{3} A_1^s + A_0^a \right) \\ &= 1 - \frac{C_g N_c \nu}{12\pi^2 E_F^2 k_F} \left[m(2E_F + m) + 3m(E_F - m)\kappa + \frac{1}{2} \kappa \left\{ E_F^2 + 4E_F m - 2m^2 + \frac{1}{2} (E_F^2 + 4E_F m - 5m^2) \kappa \right\} \ln \frac{\kappa}{2 + \kappa} \right] \quad (37) \end{aligned}$$

最後の式で、 κ の最低次 ($\kappa \ln \kappa / 2$ 項)のみをとったものが、(27)式である。個々の項では発散が残るが、「磁気感受率 (χ_M)」ではキャンセルし発散は現れない。

参考文献

- 1) T. Tatsumi, Phys. Lett. **B489** (2000), 280.
T. Tatsumi, E. Nakano and K. Nawa, *Dark Matter*, p.39 (Nova Science Pub., New York, 2006)
T. Tatsumi and K. Sato, Phys. Lett. **B 663** (2008), 322.
- 2) L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **2** (1956), 920; **5** (1957), 101.
- 3) G. Baym and C. J. Pethick, *Landau Fermi-Liquid Theory* (WILEY-VCH, 2004).
P. Nozieres, *Theory of Interacting Fermi Systems* (Westview Press, 1997).
G. Baym and S. A. Chin, Nucl. Phys. **A262** (1976), 527.
- 4) A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover Pub., New York, 1963).