Thirring模型の密度依存性について

On the density dependence of the Thirring model

横田　浩*
Hiroshi Yokota

I．はじめに

近年、有限温度・有限密度における場の量子論が、さらに注目を浴びている。それと関連して、現実とは直接結びつかなくても厳密に解ける模型は、解析の参考になるため数多く調べられている。そのような模型の１つに1+1次元の（massless）Thirring模型[1]がある。この模型は、零温度（$T=0$）・零密度（$\mu=0$）は[2]、もちろん、$T\neq 0, \mu\neq 0$でも厳密に解けることが知られている[3),4)]。

論文３）および４）は、同時期に発表されたが、熱力学ポテンシャルの密度依存性についての結果が異なっており、何人かの研究者[5)]によって再検討がなされ、論文４）の結果が正しいことが示されていることを最近知った。しかしながら、なぜ、筆者の論文３）で、異なる結果が出たのかについては、必ずしも一致した理由が与えられていなかった。

本論文の目的は、論文３）の計算を再計算し、異なる結果（熱力学ポテンシャルが相互作用の影響を受けないという結論）が、なぜ得られたかを調べることである。結果は計算間違いであり、確かに相互作用の影響を受けることが確かめられた。

II．有限温度・有限密度でのThirring模型

本節では、準備を兼ねて、有限温度・有限密度における形式を簡単に示す。詳細は論文３）等を参照のこと。（massless）Thirring模型のLagrangianは、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\partial\!\!\!/ \psi + g J^{\rho} J_{\rho} \quad (1)$$

$$J^{\rho} = \bar{\psi}\gamma^{\rho}\psi \quad (2)$$

で与えられる。この形で取り扱うのは一般に難しいので、微分結合模型

平成16年９月３日原稿受理　*教養部（現・社会学部）

$$\tilde{\mathcal{L}} = \bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi + \frac{1}{2}(\partial_\rho \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\rho \tilde{\phi})^2 + aJ^\rho \partial_\rho \phi + b\tilde{J}^\rho \partial_\rho \tilde{\phi} \tag{3}$$

$$\tilde{J}^\rho = \bar{\psi}\gamma^\rho\gamma^5\psi = \epsilon^{\rho\sigma} J_\sigma \tag{4}$$

を用いて解析を行なう。(3)式を用いた経路積分においてϕと$\tilde{\phi}$で汎関数積分を行ない、結合定数の間に$2g = b^2 - a^2$の関係をつければ、(1)式が形式的に導かれる。以下、(3)式を用いて解析する。有限温度・有限密度における温度グリーン関数Gは、

$$G \equiv \mathrm{Tr}\left(T\psi\cdots\psi\bar{\psi}\cdots\bar{\psi}e^{-\beta(H-\mu Q)}\right)/\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta(H-\mu Q)}\right) \tag{5}$$

で与えられる。ここで、HはHamiltonianであり、$Q = \int dx^1 \bar{\psi}\gamma^0\psi$はフェルミオン数演算子（fermion-number operator）である。μは密度に対応する化学ポテンシャルである。

温度グリーン関数の生成汎関数（generating functional）は、

$$Z(\bar{\xi},\xi) = Z(0,0)^{-1}\int [d_C\bar{\psi}][d_C\psi][d_C\phi][d_C\tilde{\phi}]\exp\left\{i\int_C(\tilde{\mathcal{L}} + \bar{\xi}\psi + \bar{\psi}\xi)d^2x\right\} \tag{6}$$

で与えられる。ここで、Cは、時間について$-\tau$と$-\tau - i\beta$を端点にもつ複素平面上の経路をとることを示している。このことに注意する以外は、通常の経路積分の手順に従えばよく、以下の式が得られる。

$$Z(\bar{\xi},\xi) = Z'(0,0)^{-1}\exp\left\{i\int_C \hat{\mathcal{L}}_{int}(z)d^2z\right\} Z_0(\bar{\xi},\xi,\eta,\tilde{\eta})\Big|_{\eta=\tilde{\eta}=0} \tag{7}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{int}(z) = \frac{\partial}{\partial z_\rho}\left[ag_{\rho\sigma}\frac{\delta}{i\delta\eta(z)} + b\epsilon_{\rho\sigma}\frac{\delta}{i\delta\tilde{\eta}(z)}\right]\cdot\frac{\delta}{i\delta\xi(z)}\gamma^\sigma\frac{\delta}{i\delta\bar{\xi}(z)} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Z_0(\bar{\xi},\xi,\eta,\tilde{\eta}) = \exp\Big\{-i\int_C\Big[&\bar{\xi}(x)S(x-y)\xi(y) + \frac{1}{2}\eta(x)D(x-y)\eta(y) \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{\eta}(x)D(x-y)\tilde{\eta}(y)\Big]d^2x d^2y\Big\} \end{aligned} \tag{9}$$

ここで、$S(x-y), D(x-y)$は

$$i\partial\!\!\!/\, S(x-y) = \delta(x-y) \tag{10}$$

$$-\Box\, D(x-y) = \delta(x-y) \tag{11}$$

の解である。$\delta(x-y)$は、時間については経路C上で定義されたδ関数である。また、これらのpropagater（温度伝播関数）は、

$$S(x^0-y^0, x^1-y^1) = -e^{\beta\mu}S(x^0 - i\beta - y^0, x^1-y^1) \tag{12}$$

$$D(x^0-y^0, x^1-y^1) = D(x^0 - i\beta - y^0, x^1-y^1) \tag{13}$$

の境界条件（Kubo-Martin-Schwinger条件）を満たす。実際の計算においては必要であるが、具体的な表式[3),6)-8)]は、経路Cのとり方に依存するので省略する。

(7)式に基づいて、種々の物理量が計算されるが、本論文では熱力学ポテンシャル

$$\Omega(T,\mu) = -\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\beta L}\ln Z'(0,0) \tag{14}$$

を考える。密度 $\rho(T,\mu)$ とは $\rho(T,\mu) = -\partial\Omega(T,\mu)/\partial\mu$ の関係にある。通常は、閉時間経路形式[6]等の実時間形式を用いて物理量を計算することが多いが、本論文で取り扱う熱力学ポテンシャルの計算では、虚時間形式[7),8)]を用いる方が便利である。よって、以下では、虚時間形式を使用する。

最低次（free）および2ループからの熱力学ポテンシャルへの寄与は以下のように与えられる。

$$\Omega(T,\mu) = \Omega_{free}(T,\mu) + \Omega_1(T,\mu) \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{free}(T,\mu) &= -T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p \ln\left\{\beta^2[((2n_p+1)\pi T + i\mu)^2 + p^2]\right\}/\beta \\ &= -\frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\left[\beta|p| + \ln(1+e^{-\beta(|p|-\mu)}) + \ln(1+e^{-\beta(|p|+\mu)})\right]\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\Omega_1(T,\mu) &= -\frac{1}{2}T\sum\!\!\!\!\!\!\int_k T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p T\sum\!\!\!\!\!\!\int_q \beta\delta_{n_k+n_p,\,n_q}2\pi\delta(p+k-q) \\ &\quad\times\left[a^2\frac{\mathrm{Tr}[\not{K}\not{Q}\not{K}\not{P}]}{K^2P^2Q^2} + b^2\frac{\mathrm{Tr}[\not{K}\gamma^5\not{Q}\not{K}\gamma^5\not{P}]}{K^2P^2Q^2}\right]\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p &\equiv T\sum_{n_p=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi} \\ p_0 &= (2n_p+1)i\pi T + \mu,\quad q_0 = (2n_q+1)i\pi T + \mu,\quad k_0 = 2n_k i\pi T\end{aligned}$$

本論文においては、密度依存性に興味があるため零温度（$T=0$）の場合を考えることにする。そのため、次節では計算の途中で $T\to 0$ $(\beta\to\infty)$ の極限をとる。

Ⅲ．$T=0$, $\mu\neq 0$ での熱力学ポテンシャル

本論文では $\mu>0$ として計算する。繰り込まれたfreeの熱力学ポテンシャルは（本論文の目的には直接必要ないが[5]）、良く知られているように以下の形で求められる。

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}^R_{free}(\mu) &= \Omega_{free}(T\to 0,\mu) + \text{counetrterm} \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\left[|p| - (|p|-\mu)\theta(\mu-|p|) - (|p|+\mu)\theta(-\mu-|p|)\right] + \text{counterterm} \\ &= -\frac{\mu^2}{2\pi}\end{aligned} \tag{18}$$

次に、2ループ補正 Ω_1 の計算を、少し詳しく示しながらみていく。計算は、Kapustaのテキスト[8)]に従って実行する。（17)式のTr（トレース）を実行すると、

$$\Omega_1(T,\mu) = -(a^2-b^2)T\sum\!\!\!\!\!\!\int_k T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p T\sum\!\!\!\!\!\!\int_q \beta\delta_{n_k+n_p,\,n_q}2\pi\delta(p+k-q)$$

$$\times\frac{2(K\cdot P)(K\cdot Q)-K^2(P\cdot Q)}{K^2P^2Q^2}$$

$$\equiv\quad -(a^2-b^2)[F_1(T,\mu)-F_2(T,\mu)] \tag{19}$$

$$F_1(T,\mu)\quad=\quad T\sum\!\!\!\!\!\!\int_k T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p T\sum\!\!\!\!\!\!\int_q \beta\delta_{n_k+n_p,\ n_q}2\pi\delta(p+k-q)\frac{2(K\cdot P)(K\cdot Q)}{K^2P^2Q^2} \tag{20}$$

$$F_2(T,\mu)\quad=\quad T\sum\!\!\!\!\!\!\int_k T\sum\!\!\!\!\!\!\int_p T\sum\!\!\!\!\!\!\int_q \beta\delta_{n_k+n_p,\ n_q}2\pi\delta(p+k-q)\frac{P\cdot Q}{P^2Q^2} \tag{21}$$

まず最初に、$F_1(T\to 0,\mu)$を計算する。ここで、$\beta\delta_{n_k+n_p,n_q}$は

$$\begin{aligned}\beta\delta_{n_k+n_p,n_q}\quad&=\quad\frac{e^{\beta(k_0+p_0-q_0)}-1}{k_0+p_0-q_0}\\&=\quad-\frac{e^{\beta(k_0+p_0-\mu)}-e^{\beta(q_0-\mu)}}{k_0+p_0-q_0}\end{aligned} \tag{22}$$

と書けることを用いる。最後の式へは $-1=e^{\beta(q_0-\mu)}$ を用いた。関数$f(k_0=2n_k\pi Ti)$が、k_0面の虚軸上に極（pole）を持たないとき、Kapusta[8] の（3.40)式にあるように

$$\begin{aligned}T\sum_{n_k=-\infty}^{\infty}f(k_0)\quad&=\quad\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dk_0\frac{1}{2}\left[f(k_0)+f(-k_0)\right]\\&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon}dk_0\left[f(k_0)+f(-k_0)\right]\frac{1}{e^{\beta k_0}-1}\end{aligned} \tag{23}$$

と積分形[9] に書けることを使うと、関数

$$I(p_0,q_0,k_0)\equiv-\frac{(k_0p_0-kp)(k_0q_0-kq)}{k_0+p_0-q_0}\left[e^{\beta(k_0+p_0-\mu)}-e^{\beta(q_0-\mu)}\right] \tag{24}$$

は、複素平面上に極を持たないので、解析接続を利用して、n_p,n_q,n_kの和が独立に複素積分できる。結果は次式のようになる（q_0はp_0と同じ)。

$$T\sum_{n_p=-\infty}^{\infty}\frac{I(p_0,q_0,k_0)}{P^2}\quad=\quad\frac{1}{2|p|}\left[I(|p|,q_0,k_0)N_F^-(p)+I(-|p|,q_0,k_0)[N_F^+(p)-1]\right] \tag{25}$$

$$\begin{aligned}T\sum_{n_k=-\infty}^{\infty}\frac{I(p_0,q_0,k_0)}{K^2}\quad&=\quad-\frac{1}{2|k|}\left[I(p_0,q_0,|k|)N_B(k)+I(p_0,q_0,-|k|)[N_B(k)+1]\right]\\&\quad-\frac{p_0q_0}{2}\left[e^{\beta(p_0-\mu)}+e^{\beta(q_0-\mu)}\right]\end{aligned} \tag{26}$$

$$N_F^{\pm}(p)\quad\equiv\quad\frac{1}{e^{\beta(|p|\pm\mu)}+1},\qquad N_B(k)\;\equiv\;\frac{1}{e^{\beta|k|}-1}$$

ここで、(25)式(fermion)は、Kapusta[8] の(5.53)式と同じであるが、(26)式(boson)は異なることに注意が必要である（Kapustaでは右辺第 2 項がない)。これは、今の場合 $I(p_0,q_0,k_0)$ の分子に k_0^2 があるため、 k_0の複素積分時に無限遠での効果が残るためである。

無限遠で残る項が出てくることを以下に示す。(23)式の右辺の積分を閉経路にして、複素積分を行なう（留数部分から（26)式の右辺第 1 項が出てくる)。このとき、第 1 項の$f(k_0)$部分は左半面、$f(-k_0)$部分は右半面の半径Rの半円で閉じた経路を作る。第 2 項は、虚軸上に極を含むので、虚軸を含まないように右半面で積分路を閉じることに注意する必要がある。

$k_0 = Re^{i\theta}$と変数変換し、左半面で$\cos\theta < 0$、右半面で$\cos\theta > 0$であることに注意して$R \to \infty$を実行すると、$k_0^2 p_0 q_0$の項以外は０となる。よって、無限遠からの寄与は

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} id\theta \frac{1}{2}\left[\frac{-R^3 e^{3i\theta} p_0 q_0}{(R^2 e^{2i\theta})(Re^{i\theta})}\left\{e^{\beta(Re^{i\theta}+p_0-\mu)} - e^{\beta(q_0-\mu)}\right\}\right] \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} id\theta \frac{1}{2}\left[\frac{-R^3 e^{3i\theta} p_0 q_0}{(R^2 e^{2i\theta})(-Re^{i\theta})}\left\{e^{\beta(-Re^{i\theta}+p_0-\mu)} - e^{\beta(q_0-\mu)}\right\}\right] \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} id\theta \left[\frac{-R^3 e^{3i\theta} p_0 q_0}{(R^2 e^{2i\theta})(Re^{i\theta})}\left\{e^{\beta(Re^{i\theta}+p_0-\mu)} - e^{\beta(q_0-\mu)}\right\}\right]\frac{1}{e^{\beta Re^{i\theta}}-1} \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} id\theta \left[\frac{-R^3 e^{3i\theta} p_0 q_0}{(R^2 e^{2i\theta})(-Re^{i\theta})}\left\{e^{\beta(-Re^{i\theta}+p_0-\mu)} - e^{\beta(q_0-\mu)}\right\}\right]\frac{1}{e^{\beta Re^{i\theta}}-1} \\
\overset{R\to\infty}{\to}\; & -\frac{p_0 q_0}{2\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta\frac{e^{\beta(q_0-\mu)}}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta\frac{e^{\beta(q_0-\mu)}}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta e^{\beta(p_0-\mu)} + 0\right] \\
= \; & -\frac{p_0 q_0}{2}\left[e^{\beta(p_0-\mu)} + e^{\beta(q_0-\mu)}\right]
\end{aligned}
\tag{27}
$$

と求められる。これが、(26)式の右辺第２項である。

(25)、(26)式を用いて、n_p, n_q, n_kの和が以下のように求められる[10]。

$$
\begin{aligned}
& -8T\sum_{n_k=-\infty}^{\infty} T\sum_{n_p=-\infty}^{\infty} T\sum_{n_q=-\infty}^{\infty}\frac{I(p_0,q_0,k_0)}{K^2P^2Q^2} \\
= & \left[I(|p|,|q|,|k|)\frac{N_B(k)}{|kpq|} + \left\{e^{\beta(|p|-\mu)} + e^{\beta(|q|-\mu)}\right\}\right] N_F^-(p)N_F^-(q) \\
& + \left[I(-|p|,|q|,|k|)\frac{N_B(k)}{|kpq|} - \left\{e^{\beta(-|p|-\mu)} + e^{\beta(|q|-\mu)}\right\}\right][N_F^+(p)-1]N_F^-(q) \\
& + \left[I(|p|,|q|,-|k|)\frac{N_B(k)+1}{|kpq|} + \left\{e^{\beta(|p|-\mu)} + e^{\beta(|q|-\mu)}\right\}\right] N_F^-(p)N_F^-(q) \\
& + \left[I(-|p|,|q|,-|k|)\frac{N_B(k)+1}{|kpq|} - \left\{e^{\beta(-|p|-\mu)} + e^{\beta(|q|-\mu)}\right\}\right][N_F^+(p)-1]N_F^-(q) \\
& + \left[I(|p|,-|q|,|k|)\frac{N_B(k)}{|kpq|} - \left\{e^{\beta(|p|-\mu)} + e^{\beta(-|q|-\mu)}\right\}\right] N_F^-(p)[N_F^+(q)-1] \\
& + \left[I(-|p|,-|q|,|k|)\frac{N_B(k)}{|kpq|} + \left\{e^{\beta(-|p|-\mu)} + e^{\beta(-|q|-\mu)}\right\}\right][N_F^+(p)-1][N_F^+(q)-1] \\
& + \left[I(|p|,-|q|,-|k|)\frac{N_B(k)+1}{|kpq|} - \left\{e^{\beta(|p|-\mu)} + e^{\beta(-|q|-\mu)}\right\}\right] N_F^-(p)[N_F^+(q)-1] \\
& + \left[I(-|p|,-|q|,-|k|)\frac{N_B(k)+1}{|kpq|} + \left\{e^{\beta(-|p|-\mu)} + e^{\beta(-|q|-\mu)}\right\}\right][N_F^+(p)-1][N_F^+(q)-1]
\end{aligned}
\tag{28}
$$

右辺第１項目の $I(|p|,|q|,|k|)$を含む項の零温度極限（$T \to 0$）は（$|kpq|$を除いて）

$$
\begin{aligned}
& I(|p|,|q|,|k|)N_F^-(p)N_F^-(q)N_B(k) \\
= & -\frac{(|kp|-kp)(|kq|-kq)}{|k|+|p|-|q|} \\
& \qquad\times\left[e^{\beta(|k|+|p|-\mu)} - e^{\beta(|q|-\mu)}\right]\frac{1}{e^{\beta(|p|-\mu)}+1}\frac{1}{e^{\beta(|q|-\mu)}+1}\frac{1}{e^{\beta|k|}-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad -\frac{(|kp|-kp)(|kq|-kq)}{|k|+|p|-|q|}\left[\frac{e^{\beta(|p|-\mu)}}{e^{\beta(|p|-\mu)}+1}\frac{1}{e^{\beta(|q|-\mu)}+1}\frac{e^{\beta|k|}}{e^{\beta|k|}-1}\right.\\
&\qquad\qquad \left.-\frac{1}{e^{\beta(|p|-\mu)}+1}\frac{e^{\beta(|q|-\mu)}}{e^{\beta(|q|-\mu)}+1}\frac{1}{e^{\beta|k|}-1}\right]\\
&\overset{T}{\rightarrow}{}^{0} \quad -\frac{(|kp|-kp)(|kq|-kq)}{|k|+|p|-|q|}\theta(|p|-\mu)\theta(\mu-|q|) \qquad (29)
\end{aligned}
$$

と求められる。残りの項も同様に求められ、$F_1(T\to 0,\mu)$ の $I(\pm|p|,\pm|q|,\pm|k|)$ を含む部分は

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_1^{(1)}(\mu) &= F_1(T\to 0,\mu)\\
&= \frac{2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq\int_{-\infty}^{\infty}dk\frac{\delta(p+k-q)}{8|kpq|}\\
&\quad\times\left[\frac{(|kp|-kp)(|kq|-kq)}{|k|+|p|-|q|}\theta(|p|-\mu)\theta(\mu-|q|)\right.\\
&\qquad+\frac{(|kp|+kp)(|kq|+kq)}{|k|-|p|+|q|}\theta(\mu-|p|)\theta(|q|-\mu)\\
&\qquad\left.+\frac{(|kp|-kp)(|kq|+kq)}{|k|+|p|+|q|}\{\theta(|p|-\mu)+\theta(|q|-\mu)\}\right]\\
&= \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq\\
&\quad\times\left\{\frac{(q-p)\theta(q-p)}{|pq|}\left[\frac{(|p|-p)(|q|-q)}{q-p+|p|-|q|}\theta(|p|-\mu)\theta(\mu-|q|)\right.\right.\\
&\qquad+\frac{(|p|+p)(|q|+q)}{q-p-|p|+|q|}\theta(\mu-|p|)\theta(|q|-\mu)\\
&\qquad\left.+\frac{(|p|-p)(|q|+q)}{q-p+|p|+|q|}\{\theta(|p|-\mu)+\theta(|q|-\mu)\}\right]\\
&\quad+\frac{(p-q)\theta(p-q)}{|pq|}\left[\frac{(|p|+p)(|q|+q)}{p-q+|p|-|q|}\theta(|p|-\mu)\theta(\mu-|q|)\right.\\
&\qquad+\frac{(|p|-p)(|q|-q)}{p-q-|p|+|q|}\theta(\mu-|p|)\theta(|q|-\mu|)\\
&\qquad\left.\left.+\frac{(|p|+p)(|q|-q)}{p-q+|p|+|q|}\{\theta(|p|-\mu)+\theta(|q|-\mu)\}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\left[\int_{-\infty}^{-\mu}dp\int_{-\mu}^{0}dq+\int_{0}^{\mu}dp\int_{\mu}^{\infty}dq+\int_{-\infty}^{-\mu}dp\int_{0}^{\infty}dq+\int_{-\infty}^{0}dp\int_{\mu}^{\infty}dq\right.\\
&\qquad\left.+\int_{\mu}^{\infty}dp\int_{0}^{\mu}dq+\int_{-\mu}^{0}dp\int_{-\infty}^{-\mu}dq+\int_{\mu}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{0}dq+\int_{0}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{-\mu}dq\right]\\
&= -\frac{1}{2\pi^2}[\mu^2-\Lambda^2] \quad (\Lambda\to\infty) \qquad (30)
\end{aligned}
$$

と求まる。ここで、Λ^2は発散項であるが繰り込みにより処理される（以下も同様）。(28)式の右辺第１項目の $I(|p|,|q|,|k|)$ を含まない項の零温度極限（$T\to 0$）は

$$
\begin{aligned}
&\left\{e^{\beta(|p|-\mu)}+e^{\beta(|q|-\mu)}\right\}N_F^-(p)N_F^-(q)\\
&= \frac{e^{\beta(|p|-\mu)}}{e^{\beta(|p|-\mu)}+1}\frac{1}{e^{\beta(|q|-\mu)}+1}+\frac{1}{e^{\beta(|p|-\mu)}+1}\frac{e^{\beta(|q|-\mu)}}{e^{\beta(|q|-\mu)}+1}\\
&\overset{T}{\rightarrow}{}^{0} \quad \theta(|p|-\mu)\theta(\mu-|q|)+\theta(\mu-|p|)\theta(|q|-\mu|) \qquad (31)
\end{aligned}
$$

と求められる。残りも同様に求められ、$I(\pm|p|,\pm|q|,\pm|k|)$を含まない項は

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1^{(2)}(\mu) &= -\frac{2}{32\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq\int_{-\infty}^{\infty}dk\delta(k+p-q) \\
&\quad\times 2\left[\theta(|p|-\mu)\theta(\mu-|q|)+\theta(\mu-|p|)\theta(|q|-\mu)+\theta(|p|-\mu)+\theta(|q|-\mu)\right] \\
&= -\frac{2}{8\pi^2}\left[\int_{\mu}^{\infty}dp\int_{0}^{\mu}dq+\int_{0}^{\mu}dp\int_{\mu}^{\infty}dq+\int_{\mu}^{\infty}dp\int_{0}^{\infty}dq+\int_{0}^{\infty}dp\int_{\mu}^{\infty}dq\right] \\
&= \frac{1}{2\pi^2}[\mu^2-\Lambda^2] \quad (\Lambda\to\infty)
\end{aligned} \tag{32}$$

となる。よって、$\tilde{F}_1(\mu)$ は

$$\tilde{F}_1(\mu)=\tilde{F}_1^{(1)}(\mu)+\tilde{F}_1^{(2)}(\mu) = -\frac{1}{2\pi^2}[\mu^2-\Lambda^2]+\frac{1}{2\pi^2}[\mu^2-\Lambda^2] = 0 \tag{33}$$

となり、熱力学ポテンシャルへの寄与はない。

次に、$F_2(T\to 0,\mu)$を計算する。まず、(22)、(25)式を用いて

$$\begin{aligned}
& T\sum_{n_p=-\infty}^{\infty}T\sum_{n_q=-\infty}^{\infty}\frac{P\cdot Q}{P^2Q^2}\beta\delta_{n_k+n_p,\,n_q} \\
&= -\frac{1}{4|pq|}\Bigg[(|pq|-pq)\Bigg\{\frac{e^{\beta(k_0+|p|-\mu)}-e^{\beta(|q|-\mu)}}{k_0+|p|-|q|}N_F^-(p)N_F^-(q) \\
&\qquad +\frac{e^{\beta(k_0-|p|-\mu)}-e^{\beta(-|q|-\mu)}}{k_0-|p|+|q|}[N_F^+(p)-1][N_F^+(q)-1]\Bigg\} \\
&\qquad -(|pq|+pq)\Bigg\{\frac{e^{\beta(k_0+|p|-\mu)}-e^{\beta(-|q|-\mu)}}{k_0+|p|+|q|}N_F^-(p)[N_F^+(q)-1] \\
&\qquad +\frac{e^{\beta(k_0-|p|-\mu)}-e^{\beta(|q|-\mu)}}{k_0-|p|-|q|}[N_F^+(p)-1]N_F^-(q)\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned} \tag{34}$$

(34)式の右辺はk_0に関して正則であるので、複素積分 (23)式からの寄与は無限遠からくる部分のみである。第1項は (27)式と同様にして ($-(|pq|-pq)/(4|pq|)$ を除いて)

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}id\theta\frac{1}{2}\left\{e^{\beta(Re^{i\theta}+|p|-\mu)}-e^{\beta(|q|-\mu)}\right\}N_F^-(p)N_F^-(q) \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}id\theta\frac{-1}{2}\left\{e^{\beta(-Re^{i\theta}+|p|-\mu)}-e^{\beta(|q|-\mu)}\right\}N_F^-(p)N_F^-(q) \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}id\theta\left\{e^{\beta(Re^{i\theta}+|p|-\mu)}-e^{\beta(|q|-\mu)}\right\}\frac{1}{e^{\beta Re^{i\theta}}-1}N_F^-(p)N_F^-(q) \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}id\theta(-1)\left\{e^{\beta(-Re^{i\theta}+|p|-\mu)}-e^{\beta(|q|-\mu)}\right\}\frac{1}{e^{\beta Re^{i\theta}}-1}N_F^-(p)N_F^-(q) \\
\overset{R\to\infty}{\to}\ & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^{\beta(|p|-\mu)}+1}\frac{e^{\beta(|q|-\mu)}}{e^{\beta(|q|-\mu)}+1}+\frac{e^{\beta(|p|-\mu)}}{e^{\beta(|p|-\mu)}+1}\frac{1}{e^{\beta(|q|-\mu)}+1}\right] \\
\overset{T\to 0}{\to}\ & \frac{1}{2}\left[\theta(\mu-|p|)\theta(|q|-\mu)+\theta(|p|-\mu)\theta(\mu-|q|)\right]
\end{aligned} \tag{35}$$

と求められる。他の項も同様にして求められ、$F_2(T\to 0,\mu)$ は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\bar{F}_2(\mu) &= F_2(T\to 0,\mu)\\
&= -\frac{1}{32\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq\int_{-\infty}^{\infty}dk\frac{\delta(p+k-q)}{|pq|}\\
&\quad\times[(|pq|-pq)\{\theta(\mu-|p|)\theta(|q|-\mu)+\theta(|p|-\mu)\theta(\mu-|q|)\}\\
&\quad+(|pq|+pq)\{\theta(|p|-\mu)+\theta(|q|-\mu|)\}]\\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\left[\int_0^{\mu}dp\int_{-\infty}^{-\mu}dq+\int_{-\mu}^{0}dp\int_{\mu}^{\infty}dq+\int_{\mu}^{\infty}dp\int_{-\mu}^{0}dq+\int_{-\infty}^{-\mu}dp\int_0^{\mu}dq\right.\\
&\quad\left.+\int_{\mu}^{\infty}dp\int_0^{\infty}dq+\int_{-\infty}^{-\mu}dp\int_{-\infty}^{0}dq+\int_{\mu}^{\infty}dq\int_0^{\infty}dp+\int_{-\infty}^{-\mu}dq\int_{-\infty}^{0}dp\right]\\
&= \frac{1}{4\pi^2}[\mu^2-\Lambda^2]\quad(\Lambda\to\infty)
\end{aligned}\tag{36}$$

ゆえに、繰り込まれた $\tilde{\Omega}_1^R(\mu)$ は、

$$\tilde{\Omega}_1^R(\mu)=-(a^2-b^2)[\bar{F}_1(\mu)-\bar{F}_2(\mu)] = (a^2-b^2)\frac{\mu^2}{4\pi^2} = -\frac{g\mu^2}{2\pi^2}\tag{37}$$

と求められるので、繰り込まれた熱力学ポテンシャルは（$\tilde{\Omega}(\mu=0)$を原点にとると）、

$$\tilde{\Omega}^R(\mu)=\tilde{\Omega}^R_{free}(\mu)+\tilde{\Omega}_1^R(\mu) = -\frac{\mu^2}{2\pi}-\frac{g\mu^2}{2\pi^2} \sim -\frac{\mu^2}{2\pi}\frac{1}{1-g/\pi}\tag{38}$$

となり、他の論文[5]の結果と（この次数の範囲で）一致する[11]。

Ⅳ．議論と今後の課題

前節で、熱力学ポテンシャルは結合定数に依存する、すなわち、相互作用の影響を受けることが確かめられた。つまり、結合定数に依存しないという結果が得られたのは、計算間違いがあったためであり、他の論文[5]で指摘されているような理由によるものではない。さらに、2ループ[12]まででは、他の論文の結果を再現している。さらに高次まで考慮し、厳密に他の論文の結果と一致するのかをみる必要がある。また、本論文では、計算を簡単にするため零温度（$T=0$）を考えたが、有限温度（$T\neq 0$）でも実行する必要がある。今後の検討課題である。

実は、2ループまでであれば、微分結合模型(3)を使わず、(1)式のLagrangianから始めても、具体的な計算は省略するが、(37)式と同じ結果を再現することも簡単に確かめられる[13]。ただし、高次まで含めた厳密な値を求めることは難しい。

$$\begin{aligned}
\Omega_1(T,\mu) &= -\frac{1}{2}gT\sum\!\!\!\!\!\!\int_p\frac{\mathrm{Tr}[\not{P}\gamma^\rho]}{P^2}T\sum\!\!\!\!\!\!\int_q\frac{\mathrm{Tr}[\not{Q}\gamma_\rho]}{Q^2}\\
&= -2gT\sum\!\!\!\!\!\!\int_pT\sum\!\!\!\!\!\!\int_q\frac{P\cdot Q}{P^2Q^2} \qquad (39)\\
&= -\frac{g\mu^2}{2\pi^2} \qquad (40)
\end{aligned}$$

最後に1つ、この結果に関連したコメントをする。Ω_1のa^2に比例する項は、ϕ場のpropagater、$1/K^2$、とそのself-energy補正$\Sigma_{\phi\phi}(K)$［論文3）の（2・10)式に対応］の積をKについて積分し

た形をしているので、$\Sigma_{\phi\phi}(K)$ が化学ポテンシャル μ に依存しないという論文 3 ）の議論も誤りである可能性がある。その場合、一般のグリーン関数（n 点頂点関数）も修正が必要である可能性があるが、これも再検討課題である。

本論文は、平成15年度奈良大学研究助成（研究課題「有限温度・有限密度における場の量子論の相構造の研究」）の補助を受けて行った研究の成果の一部である。

注および参考文献

1）W. Thirring, Ann. Phys.（NY）3（1958）91.

2）B. Klaiber, *Boulder Lecture in Theoretical Physics*（Gordon and Breach, New York, 1968）, Vol.XA, p.141.

3）H. Yokota, Prog. Theor. Phys. 77（1987）1450 [Errata: 81（1989）725].

4）F. Ruiz Ruiz and R. F. Alvarez-Estrada, Phys. Lett. **B 182**（1986）354; Phys. Rev. **D35**（1987）3161.

5）熱力学ポテンシャルの計算のみが目的ではないが、例えば、
I. Sachs and A. Wipf, Phys. Lett. **B317**（1993）549; Ann. Phys.（NY）**249**（1996）380.
M.V. Mañias, C.M. Naón and M.L. Trobo, Phys. Lett. B **416**（1998）157.
R. F. Alvarez-Estrada and A. G. Nicola, Phys. Rev. D **57**（1998）3618.

6）例えば、K.C. Chou, Z.B. Su, B.L. Hao and L. Yu, Phys. Rep. **118**（1985）1.

7）T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**（1955）351.
A.A. Abrikosov, L.P. Gprkov and I.E. Dzyaloshinski, *Method of Quantun Field in Statistical Physics*（Pergamon, Oxford, 1965）.

8）J. Kapusta, *Finite-temperature field theory*（Cambridge University Press, 1989）.

9）fermion（p_0, q_0）の場合は、Kapustaのテキスト[8]と同じ結果を与えるので、積分形の表記は省略する。テキストの（3.71）式を見よ。

10）ただし、先に k_0 の和をとると（26）式の右辺第２項のために、p_0, q_0 の和（25）式にも無限遠からの寄与が現れることになり、計算が複雑になる。従って、p_0, q_0 の和の計算を先に行う方が楽である。

11）論文によって、結合定数の取り方（定義）が異なるので、比較には注意が必要である。

12）論文３）の（3・19）式に従えば、この結果がすべてになる。しかしながら、論文３）での証明方法（Appendix A）では、Ω_1以外にも残るグラフが存在するので、（3・19）式は正しくない。しかし、本論文での目的には直接必要ないので、これ以上言及しない。

13）p_0, q_0 の和を積分形にして計算するとき、（25）式の右辺以外に、無限遠からの寄与が生じることに注意する必要がある。これを考慮すると、（39）式は発散せず、厳密に計算でき、温度に依存しない結果（40）式が得られる。