

硬熱ループDyson-Schwinger方程式による QED相転移現象の数値解析の改善

吉田 光次* ・ 横田 浩**

Phase Transition in the Thermal QED :
Improved Numerical Analysis in the HTL Dyson-Schwinger Equation

Koji YOSHIDA and Hiroshi YOKOTA

要 旨

有限温度QEDにおけるカイラル対称性の破れを、硬熱ループ近似を用いたDyson-Schwinger方程式の解の解析によって研究する。精度の高いデータの解析により、相転移点近傍の分析が可能になり、ゲージや結合係数によらない臨界指数の普遍的性質を得ることが出来る。LandauゲージとFeynmanゲージでの計算結果に大きな差異はないことも示される。一方、カイラル相転移の相図におけるゲージ依存性は小さいものの、Ward-Takahashi恒等式を満たす解の模索が必要であることが示唆される。

【キーワード】 相転移、臨界指数、有限温度

I Introduction

高温高密度クォーク物質の研究は、宇宙創成期の研究や中性子星の諸性質を探る上で重要なテーマである。近年では、有限温度、有限密度における相構造の探索に、理論、実験の双方からのアプローチが行われている。クォーク・ハドロン相の研究の中心的テーマとして、多くの研究が進められている最先端領域である。

加速器による実験では、RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) およびCERNのLHC (Large Hadron Collider) でのQGP (Quark Gluon Plasma) 状態におけるクォーク物質に関する精力的研究が興味深い成果を輩出している¹⁾。

一方、クォーク物質の理論的研究は、カイラル相転移現象を中心に多くの研究が進められている。その重要な特徴は非摂動的な取り扱いを必要とすることである。例えば、格子ゲージ理論による大規模数値計算がある²⁾。有限密度では符号問題の困難があったが、虚化学ポテンシャルの導入により、新たな研究成果が生まれている³⁾。また、繰り込み群によるアプローチも有力な手段として多くの研究がある⁴⁾。

そのような理論研究の中でもDyson-Schwinger方程式 (DS方程式) による解析は、様々な段階の近似を逐次的に取り入れることができる利点があり、QED/QCDを直接的に扱うことができるという点で

平成26年9月17日受理 *教養部 准教授 **教養部 教授

利点があり、多くの研究がなされている⁵⁾。

近年我々は、有限温度でのQED/QCDのDS方程式による解析を進めてきた。従来の解析は、FukazawaらによるQEDでの計算⁶⁾があった。我々は一歩進んで、熱的崩壊をもたらす虚数部を取り込み、エネルギー依存性を加味し、有限温度では当然起こるLorentz対称性の破れを仮定した。また、Haradaらによる研究⁷⁾は有限温度・有限密度でのQCDを対象とする。対相関も取り入れることのできる枠組みであるが、グルーオン伝播関数にDebye質量を入れる簡便な近似を用いている。我々の計算はゲージボゾン伝播関数にHTL (Hard Thermal Loop) 近似を用い、より現実的な伝播関数を採用している。しかし、QCDを扱ったり、対相関を取り込んだりすることは次のステップの作業として準備の段階である。特にQCDへの適用は喫緊の課題である。

我々はこれまでの研究において、このDS方式の解析に基づき、相転移現象、および、カイラル対称相での準粒子の性質を調べてきた⁸⁾。本稿では、数値計算処方改良により定量的に改善された相転移現象の分析を通し、より精密な結果を提示し、議論を進めたいと考える。

以下では、II節においてDS方程式による分析の枠組みを簡単に述べ、新たな分析の要点を説明する。III節では、数値計算によって得られた結果を示し、その特徴を解説する。IV節では、得られた結果において重要なゲージ不変性の吟味を行い、ゲージ不変性を持つ計算の重要性を議論する。V節では、本稿の内容についてまとめを行う。

II Formulation

有限温度でのDS方程式の取り扱いには、実時間形式を採用する⁹⁾。実時間形式はエネルギーによる積分を含み煩雑で、虚時間形式での無限級数の計算に較べると数値計算上の難しさを持つ。しかし、実エネルギーでの物理量を解析接続なしに求められるため、減衰幅やdispersion lawを得ることができる。

フェルミ粒子の伝播関数は

$$S_R(P) = \frac{1}{A(P)\gamma_i p^i + B(P)\gamma_0 - C(P)} \quad (1)$$

で表される。 A, B, C は運動量 P の関数であり、DS方程式を解き、求めるべきものである。 A, B, C は複素関数で、回転対称性のため、3元運動量の大きさ p に依存し、角度には依存しない。荷電対称性により、

$$A(P)^* = A(p, -p_0), B(P)^* = -B(p, -p_0), C(P)^* = C(p, -p_0) \quad (2)$$

を満たす。質量関数

$$\Sigma_R(P) = (1 - A(P))p_i \gamma^i - B(P)\gamma^0 + C(P) \quad (3)$$

に対するDS方程式

$$\begin{aligned} -i\Sigma_R(P) = -i\Sigma_{RA}(-P, P) = & -\frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \\ & \times [*\Gamma_{RAA}^\mu(-P, K, P-K)S_{RA}(K) *\Gamma_{RAA}^\nu(-K, P, K-P) *G_{C,\mu\nu}(P-K) \\ & + *\Gamma_{RAA}^\mu(-P, K, P-K)S_{RR}(K) *\Gamma_{AAR}^\nu(-K, P, K-P) *G_{R,\mu\nu}(P-K)] \end{aligned} \quad (4)$$

を解き、係数 A, B, C を求める。

ゲージボソンの伝播関数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 *G_R^{\mu\nu}(K) &\equiv *G_{RA}^{\mu\nu}(-K, K) \\
 &= \frac{1}{*\Pi_T^R(K) - K^2 - i\epsilon k_0} A^{\mu\nu} + \frac{1}{*\Pi_L^R(K) - K^2 - i\epsilon k_0} B^{\mu\nu} - \frac{\xi}{K^2 + i\epsilon k_0} \frac{K^{\mu\nu}}{K^2}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$*G_C^{\mu\nu}(K) \equiv *G_{RR}^{\mu\nu}(-K, K) = (1 + 2n_B(k_0)) [*G_R^{\mu\nu}(K) - *G_A^{\mu\nu}(K)], \quad (6)$$

$$n_B(k_0) = \frac{1}{\exp(k_0/T) - 1} \quad (7)$$

$\Pi_T^R(K)$, $\Pi_L^R(K)$ はHTL近似による横方向と縦方向の分極関数を採用する¹⁰⁾。また、 $A^{\mu\nu}$, $B^{\mu\nu}$ は、横成分、縦成分の射影テンソルである。 ξ はゲージパラメーターであり、Landauゲージでは $\xi=0$ 、Feynmanゲージでは $\xi=1$ である。 R および A は遅延 (Retarded) および先進 (Advanced) を意味する⁹⁾。頂点関数 Γ はpoint vertexを用いる梯子近似を採用する。

(4) 式にこれらの近似を適用し、係数 A , B , C の満たす方程式が以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 p^2[1 - A(P)] &= e^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \left[\{1 + 2n_B(p_0 - k_0)\} \text{Im}[*G_R^{\rho\sigma}(P - K)] \times \right. \\
 &\quad \left[\{K_\sigma P_\rho + K_\rho P_\sigma - p_0(K_\sigma g_{\rho 0} + K_\rho g_{\sigma 0}) - k_0(P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0}) + pkz g_{\sigma\rho} \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2p_0 k_0 g_{\sigma 0} g_{\rho 0}\} \frac{A(K)}{[k_0 + B(K) + i\epsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} + \{P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2p_0 g_{\sigma 0} g_{\rho 0}\} \frac{k_0 + B(K)}{[k_0 + B(K) + i\epsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right] + \{1 - 2n_F(k_0)\} \times \\
 &\quad *G_R^{\rho\sigma}(P - K) \text{Im} \left[\{K_\sigma P_\rho + K_\rho P_\sigma - p_0(K_\sigma g_{\rho 0} + K_\rho g_{\sigma 0}) - k_0(P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0}) \right. \\
 &\quad \left. \left. + pkz g_{\sigma\rho} + 2p_0 k_0 g_{\sigma 0} g_{\rho 0}\} \frac{A(K)}{[k_0 + B(K) + i\epsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \{P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0} - 2p_0 g_{\sigma 0} g_{\rho 0}\} \frac{k_0 + B(K)}{[k_0 + B(K) + i\epsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right] \right], \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B(P) &= e^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \left[\{1 + 2n_B(p_0 - k_0)\} \text{Im}[*G_R^{\rho\sigma}(P - K)] \times \right. \\
 &\quad \left[\{K_\sigma g_{\rho 0} + K_\rho g_{\sigma 0} - 2k_0 g_{\sigma 0} g_{\rho 0}\} \frac{A(K)}{[k_0 + B(K) + i\epsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \{2g_{\rho 0} 2g_{\sigma 0} - g_{\sigma\rho}\} \frac{k_0 + B(K)}{[k_0 + B(K) + i\epsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right] + \{1 - 2n_F(k_0)\} \times \right. \\
 &\quad *G_R^{\rho\sigma}(P - K) \text{Im} \left[\frac{A(K)}{[k_0 + B(K) + i\epsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \{K_\sigma g_{\rho 0} + K_\rho g_{\sigma 0} \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2k_0 g_{\sigma 0} g_{\rho 0}\} + \frac{k_0 + B(K)}{[k_0 + B(K) + i\epsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \{2g_{\rho 0} 2g_{\sigma 0} - g_{\sigma\rho}\} \right] \right], \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(P) &= -e^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} g_{\sigma\rho} \left[\{1 + 2n_B(p_0 - k_0)\} \text{Im}[*G_R^{\rho\sigma}(P - K)] \times \right. \\
 &\quad \left. \frac{C(K)}{[k_0 + B(K) + i\epsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} + \{1 - 2n_F(k_0)\} \times \right. \\
 &\quad \left. *G_R^{\rho\sigma}(P - K) \text{Im} \left[\frac{C(K)}{[k_0 + B(K) + i\epsilon]^2 - A(K)^2 k^2 - C(K)^2} \right] \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

ここで改良したIE (Instantaneous Exchange) 近似を適用する。IE近似の下では、ゲージボゾンの伝播関数は $k_0=0$ とし計算を行うが、改良点として、横成分とゲージ依存部の分母では極構造を取り入れるため $k_0=0$ とはしない。

また、縦成分では、 $k_0=0$ とすることで、 $k_0=\infty$ で0に収束する性質が失われないよう、一部にのみ適用されている。さらに、ボゾン分布関数 $n_B(k_0)$ についてもIE近似を適用しない。

運動量積分においては、カットオフパラメーター Λ 、 Λ_0 を導入する。 Λ は三次元運動量のカットオフで、積分の紫外発散を抑える。温度 T 、4元運動量 P 、係数 B 、 C は Λ を単位として計測する。以下、 $T=0.1\Lambda$ などは $T=0.1$ と表す。一方、 Λ_0 は Λ が有限である限り、 $\Lambda_0=\infty$ であっても発散を惹き起さない。従って、Lorentz不変性のない系では、3次カットオフとして Λ のみを導入し、 $\Lambda_0=\infty$ であるべきである。ここでは、数値計算の結果が収束する十分大きな数として $\Lambda_0=5\Lambda$ を採用する。

このカットオフで制限された (p, p_0) 平面を 50×1000 のサイトに分割し、DS方程式を解く。係数 A 、 B 、 C は各格子点上での値によって与えられる。DS方程式は逐次計算によって解かれる。

また、これまでの論文では $p=0.1$ 、 $p_0=0$ での B 、 C の値から相転移や崩壊幅を考察してきたが、本稿では $p=0$ の値を求め、採用することにする。上記の逐次計算では積分の重みのため $p=0$ での値は計算しないが、収束解を求めた後、 $p=0$ を(9) (10)式に代入し、 B 、 C を得ることができる(A は求めることができない)。よって静止系での質量などの物理量が求められる。また、 $p_0=0$ に替って、onshell条件を満たす $\omega(p)$ を用いることにする。onshell条件は、 S の分母に現れる

$$V = (p_0 + B)^2 - A^2 p^2 - C^2 \quad (11)$$

について、 $V=0$ の解で定義する。この際、 $p_0 = \omega(p) + i\gamma_p$ として実部 $\omega(p)$ および虚部 γ_p を求める。但し、 A 、 B 、 C の引数は実数 $p_0 = \omega(p)$ と仮定する。すなわち、虚数部分 γ_p は小さいと仮定するのである。この仮定は必ずしも正しいとは言えない。複雑な解析接続を避けるための簡便法である。 γ_p は、より確実な代用物として $\text{Im}B(p, \omega(p))$ がある。対称相では、 $\gamma_p = \text{Im}B$ であることが分かっている。本稿では $\text{Im}B$ を崩壊幅 γ_p として扱うことにする。

このような枠組みの下、結合係数 $\alpha=2.0 \sim 8.0$ 、温度 $T=0.05 \sim 0.18$ の領域で、ゲージパラメーター $\xi=0 \sim 1.0$ の範囲でDS方程式の解を求めた。相転移温度を求め、 $\alpha-T$ 相図を描くことを主目的とし、凝縮相と臨界温度近傍を重点的に計算している。なお、弱結合領域での対称相の分析は(11)、(12)に詳しい報告がある。

節の最後に、数値計算上の改善点について触れておく。これまでの数値計算では、数値積分の精度に問題があった。原因の一つはHeaviside階段関数の積分である。フェルミオン伝播関数の係数 A 、 B 、 C が離散的に与えられているため、階段関数によって与えられる積分範囲の、温度の変化などによる変化が、人為的な不連続性を生じさせる。この点に関し、連続性を担保する処置を行い、非常に性質の良い(スムーズな)計算結果を得ることができる。同様のことは対数関数の積分においても起こり、連続性を確保する処置を行っている。その結果、臨界曲線が臨界点付近まで求められるようになり、臨界指数の決定の精度が著しく向上した。

III Results

最初にカイラル対称性の破れを表す相転移の臨界曲線を示そう。臨界曲線は相転移の秩序変数の変化を温度の関数として表す。フェルミオン伝播関数の係数 C がカイラル対称性を破る質量項であり、相転移後のカイラル対称相ではゼロになる秩序変数とみなせる。カイラル凝縮 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ など他の物理量も秩序変数とみなせるが、臨界温度や臨界指数を求める際に、いずれの量を秩序変数とするかは問題ではない。ゆえにDS方程式を解くことで直接求められている C を選択することにする。 $C(p=0, p_0=0)$ を秩序変数とする臨界曲線を温度の関数として図示する (Figure 1)。各曲線はLandau ゲージにおける結合係数 $\alpha=2.0\sim 8.0$ の場合に対応している。 $p=0, p_0=0$ における C は荷電対称性のため虚部は0であり、 $C=\text{Re}C$ である。いずれの結合係数 α についても2次の相転移を起こす。臨界温度は結合定数の増加とともに上昇し $T=0.055\sim 0.17$ である。結合係数の大きい領域では、臨界温度は飽和していくようにふるまう。臨界曲線は極めてスムーズであり、以前の結果⁸⁾からの改善が著しい。

2次の相転移では臨界点近傍の凝縮相では秩序変数の振る舞いは $(T_c-T)^\eta$ の漸近形となる。 T_c は臨界温度で η は臨界指数である。 η をそれぞれの結合係数の臨界曲線について求めた。上述の通り、臨界曲線は極めてスムーズで $1-T/T_c\leq 10^{-5}$ まで求めてもデータのばらつきが小さい。本稿では臨界点近傍 $1-T/T_c\leq 10^{-4}$ で離散的な計算データを $C(T)=a(T_c-T)^\eta$ の形にフィットし、臨界温度 T_c 、臨界指数 η 、定数 a を求める。ただし、臨界温度 T_c は数値計算の結果から0.01%以内の範囲では既に決

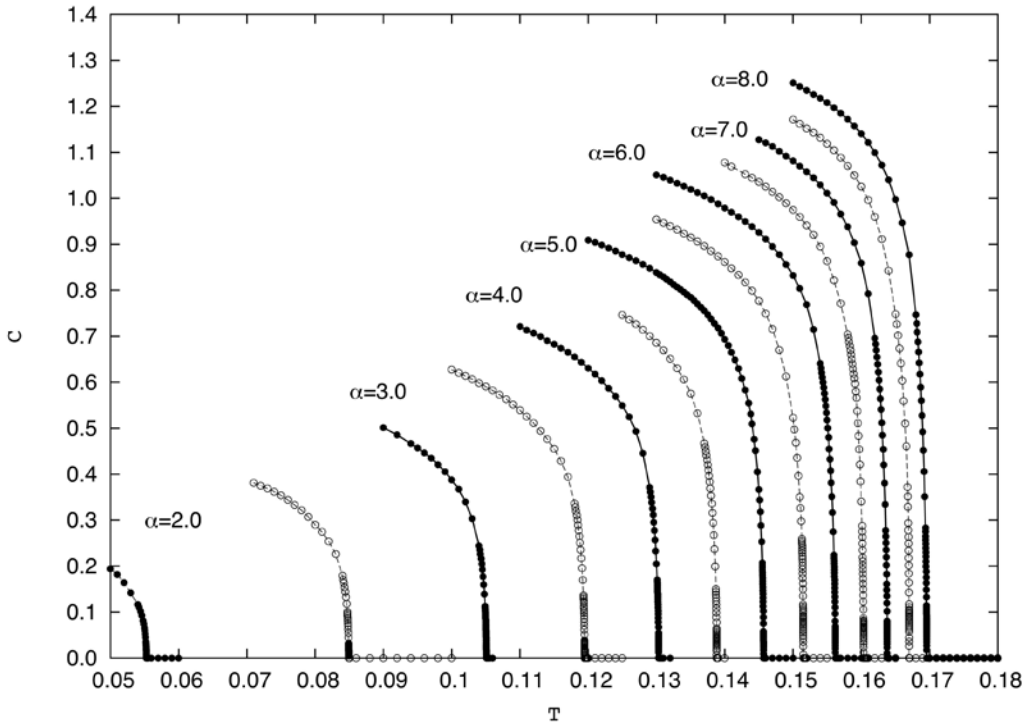


Figure 1: Landau ゲージでの臨界曲線 $C(p=0, p_0=0)$ を温度 T の関数として描いたグラフ。異なる結合係数 α に関するグラフは0.5間隔で描かれている。 α の増加によって臨界温度は単調に増加するが、いずれも2次相転移である。

まっており、フィットでの許容幅は極めて小さい。

解析の結果、臨界指数はいずれの結合係数に関してもほぼ同一で $\eta=0.5$ である。そのばらつきは ± 0.02 程度しかない。 $\eta=0.5$ はFukazawaら⁶⁾と一致するものである。これまでの計算では、0.45~0.6で結果にばらつきがあったが、より精度の高い計算により、信頼度の高い結果が求められた。

つぎにゲージパラメーター ξ に対する依存性を見てみよう。結合係数 $\alpha=5.0$ とし、ゲージパラメーター ξ を $\xi=0$ (Landauゲージ) から $\xi=1$ (Feynmanゲージ) の間で変化させ、温度 T の関数として描いた臨界曲線をFigure 2に示す。ここでも $p=0, p_0=0$ での $C=\text{Re}C$ を示している。LandauゲージからFeynmanゲージへ移行するにつれて、臨界温度が上がっている。しかし、その変化は0.145~0.150のわずかなもので、大きなゲージ依存性を持っているとはいえない。

さらに、それぞれのゲージパラメーターでの臨界曲線に対する臨界指数を求めてみると、いずれも $\eta=0.5$ であり、ゲージ依存性がないことがわかった。よって、臨界指数は局所的なcovariantなゲージの範囲において、ゲージパラメーターや結合係数によらないことがわかる。

また、臨界指数の計算には、 $C(p=0, p_0=0)$ を秩序変数とした臨界曲線を用いるほかに、 $C(p=0.1, p_0=0)$, $C/A(p=0.1, p_0=0)$, $C(p=0, p_0=\omega)$, $\omega(p=0)$ およびカイラル凝縮 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\text{tr}S_R$ を用いても計算することができる。 ω は本来thermal massで対称相でも弱結合の極限では0になることはないが、11) で示したように強結合下では、対称相で0になる。従って秩序変数になり得る。しかし、いずれを用いても、 $\eta=0.5$ であり、この結果は非常に堅固である。また、温度 T を固定し、結合係数の関数と

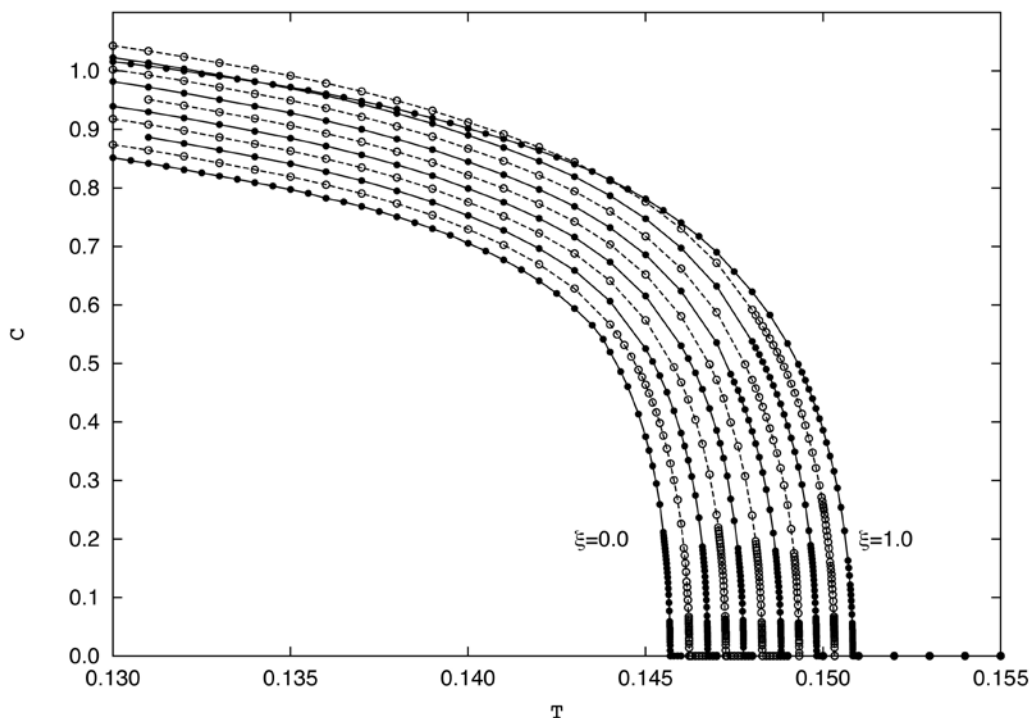


Figure 2: 結合係数=5.0での臨界曲線 $C(p=0, p_0=0)$ を温度 T の関数として描いたグラフ。異なるゲージパラメーター ξ に関するグラフは0.1間隔で描かれている。 ξ の増加に伴い、臨界温度は単調に増加している。いずれも2次の相転移である。

して秩序変数の臨界曲線 $C(\alpha) = a(\alpha - \alpha_c)^\nu$ を扱った場合も $\nu=0.5$ であり、6) の臨界指数と極めてよく一致することを示している。

DS方程式の解の虚数部分にも注目しよう。係数 B の実部は熱的質量と結びつくが、虚部は熱的崩壊と関係する。相転移温度の分析ではいずれの量を秩序変数にとっても定性的・定量的な差異が見られなかったが、熱的崩壊現象の特徴を考察するには物理的な崩壊幅を求める必要がある。従って、2節で示した通り $p_0 = \omega(p)$ での係数 $\text{Im}B$ の値、つまり onshell 条件での値を物理量として採用する。 $p=0$, $p_0 = \omega(0) \equiv \omega_s$ 、すなわち、静止系での崩壊幅 $\gamma_s \equiv \text{Im}B(p=0, p_0 = \omega_s)$ を扱う。Figure 3はLandauゲージでの $\alpha=2.0 \sim 8.0$ の結合係数に対する $\text{Im}B$ を温度 T の関数で表したものである。相転移点で振舞が大きく変わることがわかる。高温領域はカイラル対称相であるから、 $p=0$, $p_0 = \omega_s = 0$ である。対称相では、崩壊幅は線形の振る舞いをしながら、温度とともに増加する。この振舞いは13) の有効摂動計算と一致する。凝縮相では崩壊幅は温度とともに減少しているように見える。ここでは $p_0 = \omega_s$ が温度の関数として変化することに注意を払う必要がある。凝縮相でも $p_0 = 0$ での $\text{Im}B$ は温度とともに上昇する。従って崩壊幅の減少は、 ω_s の温度変化によるものである。 onshell 条件は (11) 式が0となる複素数 p_0 によって満たされ、本来その虚部が崩壊幅であるが、複素空間で極を求めることはできない。それゆえ、簡易的な方法での近似解が ω_s と γ_s である。従って、この簡易的な方法は虚部の小さい条件でのみ有効である。強結合有限温度QEDでは、熱的崩壊幅が非常に大きく簡易的な近似解の妥当性は詳しく吟味しなければならない。

臨界曲線から得られた臨界温度から、LandauゲージおよびFeynmanゲージについて $T-\alpha$ 平面で

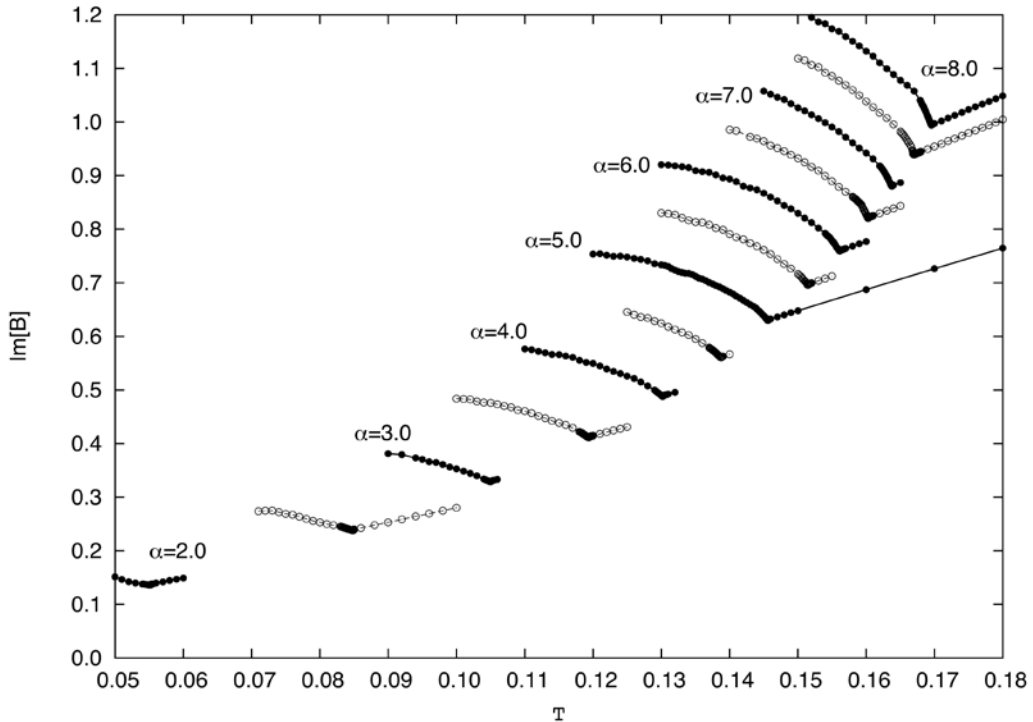


Figure 3: 減衰幅 $\gamma_s \equiv \text{Im}B(p=0, p_0 = \omega_s)$ を温度 T の関数として描いたグラフ。 α は0.5 間隔である。転移温度で曲線の性質が変わっている。

の相図を描く (Figure 4)。ただし、 α については $1/\alpha$ を縦軸としている。従って、図の原点側は、 $T=0$, $\alpha=\infty$ であり、凝縮相である。Landauゲージに比べて、Feynmanゲージでは凝縮相が広い。相転移温度がFeynmanゲージの方で高いことを反映している。しかし、その差は大きな差異ではない。また、低温・弱結合領域では、相境界のゲージ依存性は小さい。

$T-1/\alpha$ 平面内での相境界は直線的であるが、低温での計算データがないため $T=0$ の極限への外挿は難しい。低温での計算データがない理由は近似の限界と数値計算の問題である。第一にHTL近似を用いていることである。もちろんこの近似は高温で有効である。低温への適用は慎重でなければならない。第二に、低温では崩壊幅が小さくなり、フェルミオン伝播関数が実軸近傍に極を持つと考えられることである。実時間形式の熱場理論では、エネルギーの実軸上の積分を実行するが、実軸上に特異点がある場合には数値積分ができない。たとえ、実軸上でなくとも、近傍にある場合、結果がサイトの分割に大きく依存してしまい、解は極めて不安定である。実際、収束解を得ることはできていない。それゆえ、現在の計算の枠組みでは低温部分への拡張は困難である。高温・高結合領域も外挿が可能に見える。 $T>0.25$ ではカイラル凝縮が起きない可能性が示唆される。高温での計算では、 γ_s が大きいことからより大きいカットオフ Λ_0 での計算が必要である。

DS方程式の解には、わずかにゲージ依存性があることがわかった。唯一臨界指数にはゲージ依存性も、温度、結合係数への依存度もなく普遍的性質を持っている。ただし、臨界温度に見られるわずかなゲージ依存性には注意が必要である。本来ゲージ対称性が存在するので、物理量はゲージには依存しない。従って、ゲージ依存性がわずかであることは、この解析の結果が、ある程度物理的な意味を

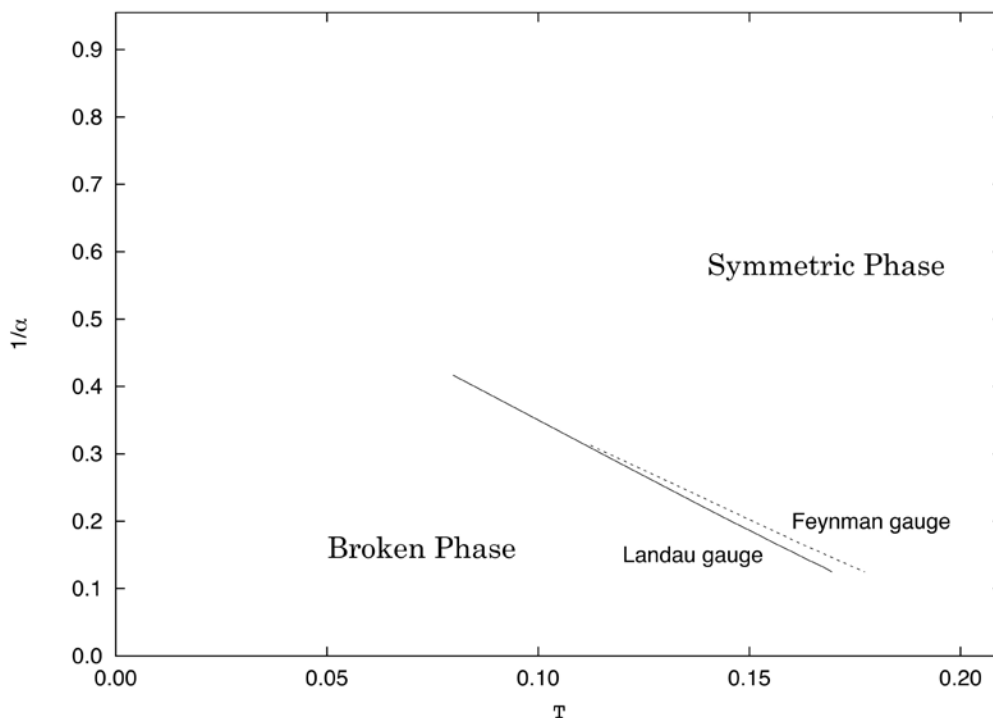


Figure 4: $T-1/\alpha$ 平面でのQED相図。原点側が凝縮相 (Broken Phase) である。LandauゲージとFeynmanゲージの差はわずかしかない

持っていることを示唆する。ただし、梯子近似の下では、Feynmanゲージでは、Landauゲージより広い凝縮相を与えることが一般的であると期待すること出来ない。ゲージ依存項は2位の極をもち、数値計算上難しい処理を必要としている。特に、係数 A の計算が最も困難で、転移温度にも影響を与える。ゲージ依存項の存在が臨界温度の上昇・下降いずれに作用するかも自明でない。計算処方の変更によって、変化しうるものである。ゲージ依存性が小さいがゆえに、LandauゲージとFeynmanゲージの差に堅固な特徴を見出そうとすることは意味がない。

IV Discussion

転移温度と相図においてゲージ依存性はほとんどなく、わずかであることがわかった。本来、ゲージ対称性により、これらにゲージ依存性はないはずである。このゲージ依存性の存在は、DS方程式がpoint-vertexを採用する近似により、ゲージ対称性を破っているためである。ゲージ対称性が破られていない場合、WT (Ward-Takahashi) 恒等式を満たすことがわかっている。 $T=0$ でのLandauゲージの計算ではWT恒等式を満たすことがわかっており¹⁴⁾、Landauゲージの計算が基準となると考えられている。しかし、有限温度での計算では、WT恒等式が満たされる保証はない。ここでは、WT恒等式の一部が満たされているかどうか、確認する。

point-vertexを用いた近似の下では、WT恒等式は $A=1$ であることを要求する。まず、Landauゲージにおける A ($p=0.1$, $p_0=0$) を、 $\alpha=2.0\sim 8.0$ の結合係数について、 T の関数として図示する (Figure 5)。 A については、 $p=0$ での値を求めることが出来ないため (8) 式を参照)、 $p=0.1$ の値を用いること

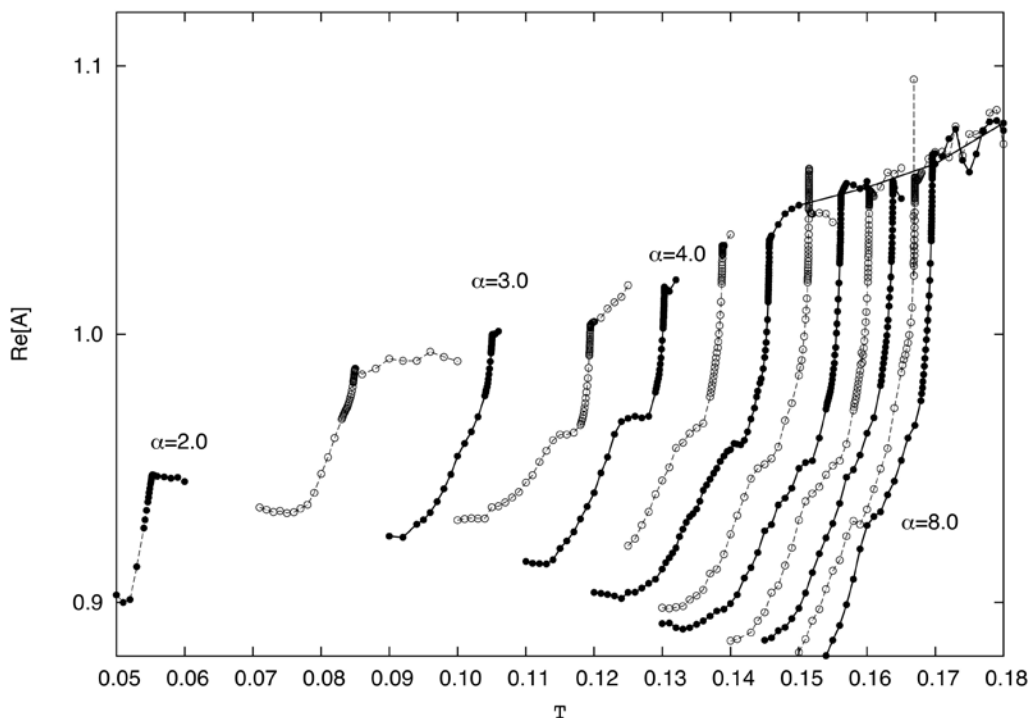


Figure 5: Landauゲージでの係数 A を T の関数として描いたグラフ。 α は0.5間隔で描かれている。

にし、 $p_0 = \omega$ ($p=0.1$) のonshell条件での値を採用する。 A には大きな α 依存性および、 T 依存性が見られ、 $A=1$ からのずれもかなりある。運動量 (p, p_0) 依存性も大きく、WT恒等式 $A=1$ が満たされているとは言い難い。

A は伝播関数の分母の $p^i \gamma_i$ の係数で、いわゆる波動関数繰り込みとは異なる。ゆえに $A < 1$ となっても問題はない。密度関数 ρ が和則 $\int dp_0 \rho(p_0) = 1$ を満たしていれば確率保存が保証される。簡単に ρ が求められる対称相では、和則の満たされることが確認される。 A の値は、onshell状態のdispersion lawへも影響する。重要なことはdispersion lawがtime-likeな領域にあることである。これも、問題のないことが確認される。従って、 A の値は物理的に不都合を惹起しないが、WT恒等式を満たさないことが問題として考慮すべきことである。

$T=0$ での計算と異なり、LandauゲージはWT恒等式を満たす解を与えないことがわかった。そこで、適切なゲージの選択によってWT恒等式を満たす、あるいは、近似的に満たしていると見なせる解を見つけることができるかどうかに関心が集まる。Figure 6は A のゲージパラメーター ξ に対する依存性を示すものである。結合係数を $\alpha=5.0$ として温度の関数として描いている。 C に較べるとゲージ依存度はかなり大きく、また、 T 依存性や結合係数、運動量への依存度もあり、 $A=1$ を満たす最適なゲージパラメーターが存在するとは言えない。

このことから、covariantな局所的ゲージパラメーターを選択することによってWT恒等式を満たす解を求めることは不可能であることがわかる。

よって、ゲージパラメーターを (i) 温度、結合係数の関数として変化させると (α, T)、(ii) 非局所的

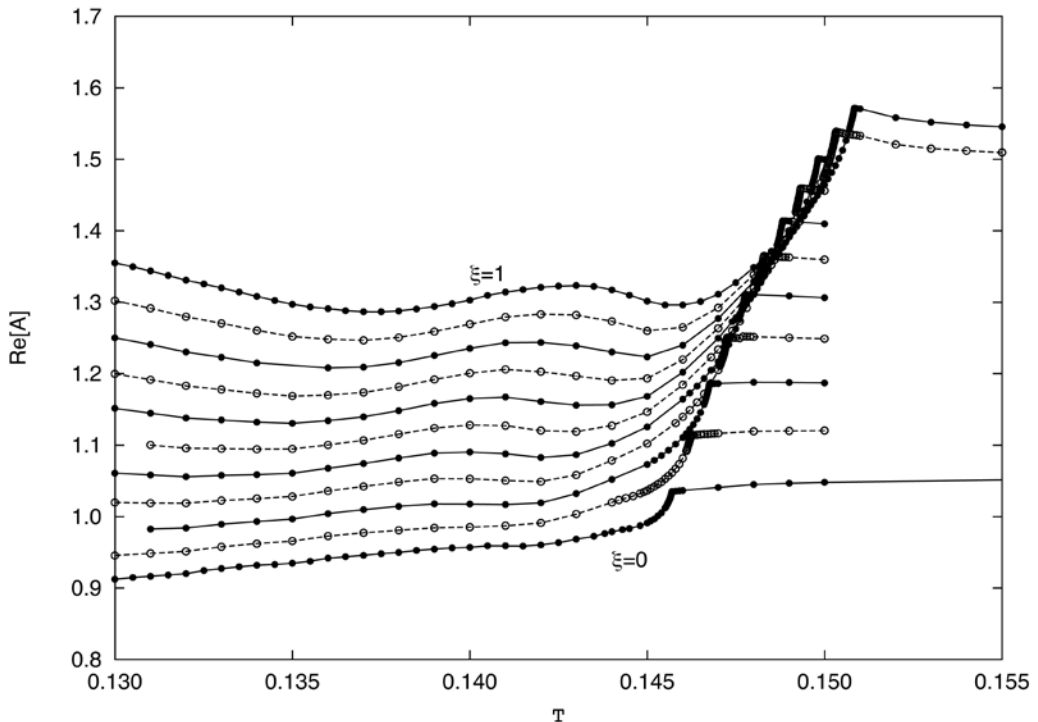


Figure 6: 係数 A のゲージ依存性を表すグラフ。ゲージパラメーター ξ は0.1間隔で描かれている。

なゲージ ξ ($Q: \alpha, T$)を導入する¹⁵⁾、などの方法によってWT恒等式を満たすよう解を調整する必要が生じる。その計算については、次の論文において報告する予定である。

V Summary

有限温度QEDにおけるカイラル相転移現象を、Landau/Feynman両ゲージについて分析した。HTL再加算ゲージボゾン伝播関数を用い改善された梯子近似の下でのDS方程式の解は、数値的に劇的な改善があった。onshell条件を導入することにより物理的な量の解析も可能になった。数値計算上の精度の向上、静止系での物理量の計算により、従来よりも正確な相転移に関する性質を得ることができた。

(i) QEDカイラル相転移は2次相転移であり、臨界指数は6)の値0.5とほぼ一致する。結合係数やゲージパラメーターによる依存性も全くないと言ってよい。また、どのような量 ($C, C/A, \omega_s$, カイラル凝縮 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$) の臨界曲線からも同様の結果が得られる。過去の計算では、計算精度の問題で、臨界点近傍での指数の決定が困難で、指数には0.5からのずれが大きいものが見られたが、今回の結果により、局所的 (local) なゲージでは臨界指数0.5の相転移が普遍的に現れることが確認できた。研究を更に進め、有限密度での計算、非局所的 (nonlocal) なゲージでの結果と本稿での結果が比較されることが期待される。有限密度では1次相転移やクロスオーバー領域の存在が予想される。非局所的なゲージではWT恒等式を満たすよう条件を課すことが可能で、物理的な意味を考える上で重要であり、相転移の性質も異なるものになると予想される。(ii) ゲージパラメーターをLandauゲージ ($\xi=0$) からFeynmanゲージ ($\xi=1$) の間で変化させ、臨界温度を求め、また、それを基に $\alpha-T$ 平面での相図を求めた結果、ゲージ依存性は極めて小さいと言える。高温、強結合領域ではその差が徐々に広がっているが、低温 ($T < 0.1$) ではその差はほとんどない。この結果は、今回の計算がほぼゲージ不変な結果を与えるものと解釈されるかもしれない。しかし、WT恒等式 (の一部) である $A=1$ を満たしておらず、非局所的なゲージで結果を得るまで結論できない。ただし、局所的なゲージの範囲では、Landau/Feynman両ゲージの間に大きな差異を生じないと言えるだろう。

これらの結果は、WT恒等式を満たす非局所ゲージの下での、有限密度にも拡張した相構造の分析を期待させるものである。また、QCDでの分析が必要不可欠であることは言うまでもない。

Acknowledgement

本研究での数値計算は、京都大学基礎物理学研究所大型計算機システムSR16000を利用して行われた。

References

- 1) I. Arsene *et al.*, Nucl. Phys. **A757** (2005), 1; B. B. Back *et al.*, Nucl. Phys. **A757** (2005), 28; J. Adams *et al.*, Nucl. Phys. **A757** (2005), 107; K. Adcox *et al.*, Nucl. Phys. **A757** (2005), 184.

- 2) A. Bazavov *et al.*, Phys. Rev. **D85** (2012), 054503; H. Saito, S. Ejiri, S. Aoki, T. Hatsuda, K. Kanaya, Y. Maezawa, H. Ohno and T. Umeda, Phys. Rev. **D84** (2011), 054502.
- 3) O. Philipsen, and C. Pinke, Phys. Rev. **D89** (2014), 094504. P. de Forcrand, and O. Philipsen, Phys. Rev. Lett. **105**(2010), 152001.
- 4) K.-I. Aoki, K. Morikawa, J.-I. Sumi, H. Terao, M. Tomoyose, Prog. Theor. Phys. **97** (1997), 479; *ibid.* **102** (1999), 1151; *id.*, Phys. Rev. **D61** (2000), 045008.
- 5) A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto and G. Pettini, Phys. Rev. **D41** (1990), 1610; S. K. Kang, W.-H. Kye and J. K. Kim, Phys. Lett. **B299** (1993), 358; K.-I. Kondo and K. Yoshida, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995), 199.
- 6) K. Fukazawa, T. Inagaki, S. Mukaigawa and T. Muta, Prog. Theor. Phys. **105** (2001), 979.
- 7) M. Harada and A. Shibata, Phys. Rev. **D59** (1998), 014010.
- 8) Y. Fueki, H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, Prog. Theor. Phys. **110** (2003), 777; H. Nakkagawa, H. Yokota, K. Yoshida and Y. Fueki, Pramana - J. Phys., **60** (2003), 1029, proc. of the Fourth International Conference on Physics and Astrophysics of Quark-Gluon Plasma (ICPAQGP-2001), Jaipur, India, November 2001, eds. B. Sinha, D. Srivastava and Y. P. Viyogi; H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, Bulletin of Research Institute of Nara University **18** (2010), 1.
- 9) L. V. Keldysh, Zh. Eksp. Theor. Fiz. **47** (1964), 1515[Sov. Phys. JETP **20** (1965), 1018]. K.-C. Chou, Z.-B. Su, B.-L. Hao and L. Yu, Phys. Rep. **118** (1985), 1.
- 10) V. V. Klimov, Solv. J. Nucl. Phys. **33** (1981), 934, Sov. Phys. JETP **55** (1982), 199; H. A. Weldon, Phys. Rev. D **26** (1982), 1394; *ibid.* **26** (1982), 2789.
- 11) H. Nakkagawa, H. Yokota, and K. Yoshida, Phys. Rev. **D86** (2012), 096007.
- 12) H. Nakkagawa, H. Yokota, and K. Yoshida, Phys. Rev. **D85** (2012), 0310902.
- 13) H. Nakkagawa, A. Niégawa and B. Pire, Phys. Lett. **B294** (1992), 396; A. Rebhan, Phys. Rev. D **46** (1992), 4779; R. Baier, H. Nakkagawa and A. Niégawa, Can. J. Phys. **71** (1993), 205; E. Braaten and R. D. Pisarski, Phys. Rev. D **46** (1992), 1829; R. D. Pisarski, Phys. Rev. D **47** (1993), 5589.
- 14) T. Maskawa and H. Nakajima, Prog. Theor. Phys. **52** (1974), 1326; *ibid.* **54** (1975), 860.
- 15) T. Kugo and M. Mitchard, Phys. Lett. **B282** (1992), 162.

Summary

We analyzed the DS equation with the HTL-resummed boson propagator to study the chiral phase transition in the thermal QED. The numerically improved solution of the equation enabled us to obtain almost universal critical exponents for the phase transition of the second order. Little gauge-dependence was found in the boundary of the phase diagram. We found an unexpected behavior of the decay width of the static mode, which should be studied in depth more carefully. Our results using local gauges were found to be inconsistent with the WT identity. Nonlocal gauges are expected to reproduce the solution that satisfies the WT identity.

Key words: phase transition, critical exponent, thermal QED