# Solution of Dyson-Schwinger Equation Consistent with Gauge Invariance Condition

ゲージ不変性を満たす DS 方程式の解法

吉田　光次*、横田　浩**

Koji YOSHIDA, Hiroshi YOKOTA

## 要　旨

有限温度QEDにおいて非局所的なゲージを採用することにより、Ward-Takahashi恒等式を満たすDyson-Schwinger方程式の解を求める。DS方程式の逐次的解法の過程で、ゲージ関数を関数基底で展開し、その展開係数を求めることにより、非局所ゲージを決定する。Landauゲージのような局所的ゲージと比べ、カイラル相転移の臨界曲線および相境界に非自明な相違が生じることが示される。

**【キーワード】** カイラル相転移、ゲージ対称性、有限温度

## I　Introduction

我々は近年、QED/QCD 相の相構造と熱的性質の解明を目指し、有限温度での Dyson-Schwinger 方程式 (DS 方程式) を解くことにより、カイラル相転移のメカニズムやや対称相での熱的性質の解析を行ってきた [1, 2]。カイラル相転移研究は、高温高密度クォーク物質の相構造研究の一部であり、対称相での熱的性質とともに宇宙創生期や中性子星の研究に資するものである。この分野では、RHIC、LHC での実験により多くの成果 [3] がもたらされているとともに、多くの理論研究が行われている。格子ゲージ理論 [4] や有効模型などによる理論計算 [5, 6] が有力な手段として挙げられる中で、我々が DS 方程式の解析に注力するのは、(i)QED/QCD を直接扱えること、(ii) 様々な段階の近似を逐次的に取り入れることができること、という利点があり、これまでも多くの研究が積み重ねられているからである [7]。

QED/QCD の DS 方程式による解析で問題になるのは、ゲージ不変性の保証である。解析の結果、得られる物理量は採用するゲージによる依存性を有するべきでないが、実際には、ゲージ依存性を持ってしまう。原因は、頂点関数やゲージボゾン伝播子に近似形を採用し、計算を簡略化してしまうことである。例えば、頂点関数には、QED/QCD の point vertex を採用したり、伝播子には 1-loop の補正をしたものを採用したりすることがある。そのため、DS 方程式にはすべてのダイアグラムが取り込まれることはなく、ゲージ対称性が破られるのだと考えられる。

平成27年９月11日受理　*教養部　准教授　**教養部　教授

前稿[2]では、point-vertex と硬熱ループ再加算ゲージ伝播子を採用した Improved Ladder 近似での、QED の解析結果を示したが、Landau ゲージと Feynman ゲージでの相違が見られ、ゲージ依存性が露顕した。相図におけるその差はわずかであったため、ゲージ対称性の保持の重要性は強調されることはなかったが、QCD での観測量の計算に向けて、定量的な比較を可能にするには避けることのできない難題である。だが、DS 方程式の解法において、ゲージ対称性を保証することは容易ではない。

しかし、特殊な場合には、ゲージ対称性をもつと考えられる解を与えることできることが分かっている。ゲージ不変性を示す指標として、Ward-Takahashi 恒等式がある。

$$\frac{\partial S^{-1}(P)}{\partial p^{\mu}} = \Gamma_{\mu} \tag{1}$$

$T$=0, $\rho$ =0でpoint-vertex, $\Gamma_{\mu} = \gamma_{\mu}$ を用いた場合、Lorentz対称性があれば$S^{-1}(P) = Ap^{\mu}\gamma_{\mu} - C$に対しては、$A(P) = 1$、$C(P) \equiv C = const.$である。Ladder 近似の下では Landau ゲージでの計算では WT 恒等式を満たすことが示されている[10]。また、running coupling での計算でも Lorentz 対称性があれば、WT 恒等式を満たすゲージを選択することが可能である[11]。しかし、有限温度のような Lorentz対称性がなく、$P$ への依存性があることを期待される場合、

$$S(P) = \frac{1}{A(P)\gamma_i p^i + B(P)\gamma_0 - C(P)}$$

が WT 恒等式を満たすゲージを見出すことは容易でない。(1) から $A(P) = 1$ が導かれるが、実際、前稿で示した通り、$A(P)$ は結合係数や温度に大きく依存し、運動量 $P$ にも依存している。相図には Landau ゲージと Feynman ゲージとの相違が数値的には大きく現れないことを示したが、ゲージ対称性への考慮のない計算結果は、その信頼性において問題を残すことは間違いない。また、$B(P)$ に WT 恒等式を課すと、thermal mass や damping rate が 0 になる。$C$ に課せば、$C$ は定数となり、運動量依存性は失われる。従って、$B$ や $C$ に WT 恒等式を課すことは、有限温度系の計算の自由度を損なってしまい、無意味になってしまうため、ここでは、$A(P)$ にのみ WT 恒等式を課すことにしよう。

我々は、WT 恒等式を満たす解を得るため、$A(P) = 1$ となるようなゲージパラメーター $\xi(Q)$ を決定することにする。解析的な決定は出来ないため、数値計算によって決定することになるが、従来の DS 方程式の枠組みを大きく変えることなく実現できる。

以下、II 節において従来の DS 方程式による分析の枠組みを簡単に述べ、III 節で、WT 恒等式を満たすゲージの決定方法を詳しく説明する。IV 節では、そのゲージの下での数値計算によって得られた結果を示す。V 節では、ゲージ不変性を満たす計算結果について吟味する。VI 節では、本稿の内容についてまとめを行う。

## II　Dyson-Schwinger Equation

有限温度での DS 方程式の解析方法は前稿[2]に詳しく説明しているので、簡潔に要点を記すことにする。実時間形式[9]を採用するため、運動量に依存する $A(P)$ , $B(P)$ , $C(P)$ によって表され

るフェルミ粒子の伝播関数

$$S_R(P) = \frac{1}{A(P)\gamma_i p^i + B(P)\gamma_0 - C(P)} \tag{2}$$

は運動量の実空間で与えられる。$A$, $B$, $C$ は DS 方程式を解いて求めるべきものである。ゲージボゾンの伝播関数は

$$\begin{aligned} {}^*G_R^{\mu\nu}(K) &\equiv {}^*G_{RA}^{\mu\nu}(-K,K) \\ &= \frac{1}{{}^*\Pi_T^R(K) - K^2 - i\epsilon k_0} A^{\mu\nu} + \frac{1}{{}^*\Pi_L^R(K) - K^2 - i\epsilon k_0} B^{\mu\nu} - \frac{\xi}{K^2 + i\epsilon k_0}\frac{K^{\mu\nu}}{K^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

$${}^*G_C^{\mu\nu}(K) \equiv {}^*G_{RR}^{\mu\nu}(-K,K) = (1+2n_B(k_0))\left[{}^*G_R^{\mu\nu}(K) - {}^*G_A^{\mu\nu}(K)\right], \tag{4}$$

$$n_B(k_0) = \frac{1}{\exp(k_0/T) - 1} \tag{5}$$

$\Pi_T^R(K)$, $\Pi_L^R(K)$ は HTL 近似による横方向と縦方向の分極関数を採用する [8]。また、$A^{\mu\nu}$,$B^{\mu\nu}$は、横成分、縦成分の射影テンソルである。$\xi$ はゲージパラメーターであり、Landau ゲージでは $\xi = 0$、Feynmanゲージでは $\xi = 1$ である (次節では $\xi$ を運動量 $K$ に依存させ WT 恒等式を満たす解を求めることになる)。$R$ および $A$ は遅延 (Retarded) および先進 (Advanced) を意味する [9]。頂点関数 $\Gamma$ は point vertex を用いる梯子近似を採用する。IE(Instantaneous Exchange) 近似の下では、ゲージボゾンの伝播関数は $k_0 = 0$ とし計算を行うが、極構造を取り入れるため、横成分とゲージ依存部の分母では $k_0 = 0$ とはしない。質量関数

$$\Sigma_R(P) = (1 - A(P))p_i\gamma^i - B(P)\gamma^0 + C(P) \tag{6}$$

に対する DS 方程式

$$\begin{aligned} -i\Sigma_R(P) = -i\Sigma_{RA}(-P,P) = -\frac{e^2}{2}\int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \\ \times[{}^*\Gamma_{RAA}^{\mu}(-P,K,P-K)S_{RA}(K)\,{}^*\Gamma_{RAA}^{\nu}(-K,P,K-P)\,{}^*G_{C,\mu\nu}(P-K) \\ + {}^*\Gamma_{RAA}^{\mu}(-P,K,P-K)S_{RR}(K)\,{}^*\Gamma_{AAR}^{\nu}(-K,P,K-P)\,{}^*G_{R,\mu\nu}(P-K)] \end{aligned} \tag{7}$$

から、係数 $A$, $B$, $C$ の満たす方程式が以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} 1 - A(P) = -\frac{e^2}{p^2}\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\Bigg[\{1+2n_B(p_0-k_0)\}Im[\,{}^*G_R^{\rho\sigma}(P-K)]\times \\ \Big[\{K_\sigma P_\rho + K_\rho P_\sigma - p_0(K_\sigma g_{\rho 0} + K_\rho g_{\sigma 0}) - k_0(P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0}) + pkz g_{\sigma\rho} \\ +2p_0k_0g_{\sigma 0}g_{\rho 0}\}\frac{A(K)}{D(K)} + \{P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0} - 2p_0 g_{\sigma 0}g_{\rho 0}\}\frac{k_0 + B(K)}{D(K)}\Big] + \{1 - 2n_F(k_0)\}\times \\ {}^*G_R^{\rho\sigma}(P-K)Im\Big[\{K_\sigma P_\rho + K_\rho P_\sigma - p_0(K_\sigma g_{\rho 0} + K_\rho g_{\sigma 0}) - k_0(P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0}) \\ +pkz g_{\sigma\rho} + 2p_0k_0g_{\sigma 0}g_{\rho 0}\}\frac{A(K)}{D(K)} + \{P_\sigma g_{\rho 0} + P_\rho g_{\sigma 0} - 2p_0 g_{\sigma 0}g_{\rho 0}\}\frac{k_0 + B(K)}{D(K)}\Big]\Bigg], \end{aligned} \tag{8}$$

$$B(P)=e^2\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\Big[\{1+2n_B(p_0-k_0)\}Im[\,{}^*G_R^{\rho\sigma}(P-K)]\times$$
$$\Big[\{K_\sigma g_{\rho 0}+K_\rho g_{\sigma 0}-2k_0 g_{\sigma 0}g_{\rho 0}\}\frac{A(K)}{D(K)}+\{2g_{\rho 0}2g_{\sigma 0}-g_{\sigma\rho}\}\frac{k_0+B(K)}{D(K)}\Big]$$
$$+\{1-2n_F(k_0)\}\,{}^*G_R^{\rho\sigma}(P-K)\times$$
$$Im\Big[\frac{A(K)}{D(K)}\{K_\sigma g_{\rho 0}+K_\rho g_{\sigma 0}\ -2k_0 g_{\sigma 0}g_{\rho 0}\}+\frac{k_0+B(K)}{D(K)}\{2g_{\rho 0}2g_{\sigma 0}-g_{\sigma\rho}\}\Big]\Big]\ , \tag{9}$$

$$C(P)=-e^2\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}g_{\sigma\rho}\Big[\{1+2n_B(p_0-k_0)\}Im[\,{}^*G_R^{\rho\sigma}(P-K)]\times$$
$$\frac{C(K)}{D(K)}+\{1-2n_F(k_0)\}\ \ {}^*G_R^{\rho\sigma}(P-K)Im\Big[\frac{C(K)}{D(K)}\Big]\Big]$$

$$D(K)=[k_0+B(K)+i\epsilon]^2-A(K)^2k^2-C(K)^2 \tag{10}$$

運動量積分においてカットオフパラメーター $\Lambda,\Lambda_0$ を導入する。$\Lambda$ は三次元運動量のカットオフで、積分の紫外発散を抑える。温度 $T$ 、４元運動量 $P$ 、係数 $B,C$ は $\Lambda$ を単位として計測する。今回の計算では、$\Lambda_0=5\Lambda$ である。この $(p,p_0)$ 平面を $50\times1000$ のサイトに分割し DS 方程式を解く。DS 方程式は逐次計算によって解かれる。$\alpha=\frac{e^2}{4\pi}$=2.0-8.0 の範囲で解を求めることにする。

## III　Ward-Takahashi 恒等式を満たすゲージ

(8)〜(10) で $A,B,C$ を逐次計算によって求め、収束解を得る過程を考えてみよう。逐次計算の $j$ 回目の逐次代入によって得られた値を $A_j(P),B_j(P),C_j(P)$ としよう。このとき、

$$1-A_{j+1}(P)=F_A[A_j,B_j,C_j],B_{j+1}(P)=F_B[A_j,B_j,C_j],C_{j+1}(P)=F_C[A_j,B_j,C_j] \tag{11}$$

となる。$F_A,F_B,F_C$ は (8)〜(10) の右辺であり、$A_j(P),B_j(P),C_j(P)$ の積分関数である。ここで重要なことは、${}^*G^{\mu\nu}(Q)$ が $\xi$ に関し 1 次であるため、$F_A,F_B,F_C$ がいずれも、

$$F_A=F_A^0+F_A^\xi,F_B=F_B^0+F_B^\xi,F_C=F_C^0+F_C^\xi \tag{12}$$

と、$\xi$ にあらわに依らない部分 $F_A^0,F_B^0,F_C^0$ と、見かけ上 $\xi$ に線形に依存する $F_A^\xi,F_B^\xi,F_C^\xi$ に分離することである。注意しなければならないのは、最終的な解 $A(P)$ , $B(P)$ , $C(P)$ が $\xi$ に線形に依存するのではないことである。解は当然、$\xi$ には非線形に依存する。また、最終的に得られる解 $A,B,C$ を $\xi$ に依存 する部分としない部分に分けることも無意味である。ここでは、逐次計算のある段階で、$A_{j+1}$ が $\xi$ に 線形に依存している部分を持つに過ぎない。$A(P)$ に関する WT 恒等式は

$$1-A_{j+1}(P)=F_A(A_j,B_j,C_j)=F_A^0+F_A^\xi=0 \tag{13}$$

となる。もし、$\xi$ が定数ならば、$1-A_{j+1}(P)=F_A+\xi F'_A$ と表せる事は明らかで、$A_{j+1}=1$ となる解を与える $\xi=-\frac{F_A}{F'_A}$ を見出すことは容易に見える。しかし、$F_A$ も $F'_A$ も運動量 $P$ に依存するため、全ての $P$ に対して $A_{j+1}(P)=1$ が成り立つような $\xi$ は存在しない。

そこで、$\xi$ により多くの自由度を与える。すなわち、ゲージボゾンの運動量 $Q$ に依存する関数 $\xi(Q)$ として振る舞うことを仮定し、このような $\xi(Q)$ を求めることにする。$\xi(Q)$ は結合係数 $\alpha$、

温度 $T$、密度などに依存するが、それをあらわには表記はしないことにする。$\xi$ を運動量 $Q$ に依存する関数としても、(13) を解き簡単に $\xi(Q)$ を求めることは出来ない。そこで、$\xi(Q)$ を関数で展開し、その展開係数を求めることにする。

$$\xi(Q) = \sum_{m,n} C_{mn} X_m(q) Y_n(q_0) \tag{14}$$

ここでは、回転対称性を仮定し、3 元運動量の大きさ $q$ とエネルギー $q_0$ による関数展開形式で表した。展開係数 $C_{mn}$ は実定数なので、(8)〜(10) の積分の外に出ることになり、求めやすくなる。関数系 $X_m, Y_n$ は任意であるが、適当な境界条件やスケールを考慮して決められるべきである。フーリエ展開などの規格直交完全形展開やべき展開 $(q^m q_0^n)$ が考えられる。係数 $C_{mn}$ が積分の外に出ることにより、(13) 式は、

$$1 - A_{j+1}(P) = F_A^0[A_j, B_j, C_j] + \sum_{m,n} C_{mn} F_A^{\xi,mn}[A_j, B_j, C_j] = 0 \tag{15}$$

となる。$F_A^{\xi,mn} = \int dq dq_0 X_m(q) Y_n(q_0) K_A$ である。$K_A$ は (8) の $\xi$ に依存する部分の被積分関数である。逐次計算の過程において、$A_j, B_j, C_j$ は既知であるから、数値積分により $F_A^0$、$F_A^{\xi,mn}$ は計算できる。よって複素数 $A_{j+1}$ が満たすべき $A_{j+1}(P) = 1$ は、(サイト数× 2 ) 個の連立 1 次方程式になり、$C_{mn}$ の数が方程式の数と等しければ、原理的には解くことができる。このゲージ解は逐次解法のある段階 $j$ で、$A_{j+1} = 1$ を満たしているに過ぎない。この段階で得られた $A_{j+1}(P), B_{j+1}(P), C_{j+1}(P)$ を逐次代入し、$A_{j+2}(P), B_{j+2}(P), C_{j+2}(P)$ を得る際には、改めて $\xi(Q)$ を求めることになる。最終的に、解 $A(P)$ , $B(P)$ , $C(P)$ が収束したとき、$\xi(Q)$ も収束解として得られることになる。ただし、50 × 1000 の 自由度の連立方程式を解くことは可能であるが、DS 方程式の収束解を得ることは困難である。数値計算には誤差を含み、自由度が多い場合、解がその誤差を反映してしまうからである。そのような解は、収束せず、いつまでも変動してしまう。そこで、条件 $A_{j+1}(P) = 1$ を緩和し、少数の自由度 ($C_{mn}$ の数) で計算する。すなわち、関数 $A(P)$ の 1 からのずれ

$$V = \frac{\int dp dp_0 w(p) |A(P) - 1|^2}{\int dp dp_0 w(p)} \tag{16}$$

を最小にすること $\delta V = 0$ を課す。このような $C_{mn}$ は少数の自由度でも解が存在する。$w(P)$ は適当な重み関数である。

$$\frac{\partial V}{\partial C_{mn}} = 0 \tag{17}$$

により、$C_{mn}$ の自由度と同数の方程式を得ることが出来る。また、$V$ は $C_{mn}$ の 2 次式であるので、$C_{mn}$ に関する連立 1 次方程式が得られ容易に解くことが出来る。Landau ゲージや Feynman ゲージでの計算から、$A(P)$ の運動量依存性は、$p_0$ 依存性が大きく、$p$ 依存性は小さいこと、及び、数値計算の簡便さから $\xi(Q)$ の $q_0$ 依存性のみを考慮する。つまり、$\xi(Q) = \sum_n C_n Y_n(q_0)$ とする。$\xi(Q)$ は複素数であることを許すと、荷電対称性から実部は $q_0$ の偶関数、虚部は $q_0$ の奇関数である。よって、$\xi(Q)$ は $\xi(Q) = \xi(q_0) = \sum_m C_m^r Y_m^r(q_0) + i \sum_n C_n^i Y_n^i(q_0)$ と、偶関数 $Y_m^r(q_0)$、奇関数 $Y_n^i(q_0)$ を用いて表すことになる。$Y^r, Y^i$ の採り方は様々な可能性がある。例えば、フーリエ展

開では、$\xi(q_0)=\sum_m C^r_m cos(\frac{mq_0}{\lambda})+i\sum_n C^i_n sin(\frac{nq_0}{\lambda})$、Hermite 型では、Hermite 多項式 $H_n(x)$ を用い、展開の基底関数は $Y_l(q_0)=H_l(\frac{q0}{\lambda})\exp(-\frac{1}{4}(\frac{q_0}{\lambda})^2)$ で、$\int dq_0 Y_{l_1}(q_0)Y_{l_2}(q_0)=N\delta_{l_1 l_2}$を満たす。$N$ は定数である。$l$ の偶奇で実部、虚部に分かれる。ここでの関数展開の本質は、ゲージ $\xi(q_0)$ の関数フィットによる決定なので、直交性も規格化も重要ではない。スケール幅 $\lambda$ は、$\frac{\partial V}{\partial\lambda}=0$ によって求めるべきであるが、$C_m$ のような簡単な方程式で表せないので、求めることは出来ない。$\alpha=4\sim5$ の相転移点近傍の数値計算の結果から、最適条件を判断し、$\lambda$ を決めることにする。展開の基底数は多いほど $V$ を小さくするが、計算時間の節約のため、11 の基底で計算する。ここでは、フーリエ展開での計算結果を示すことにする。$\lambda=4.0\Lambda, 1\leq m,n\leq 5$、および実定数項 $(m=0)$ で計算を行う。重み関数 $w(P)$ は物理的な要請により、on-shell 条件 $p_0=\omega(p)$ で極大となる関数を選択する。$\omega(p)$ は前稿 [2] で述べた方法で求める。

## IV　Results

まず、Ward-Takahashi 恒等式がどの程度満たされるのか、$A(P)$ の値を示した図 Figure 1 を見てみる。前稿 [2] と同様に、$p=0.1, p_0=\omega(p=0.1)$ での値を示す。前稿では、$0.9<Re[A]<1.5$ で、$\alpha$ 依存性、温度依存性、ゲージ依存性が大きく現れているのに対し、Figure 1 では、$0.98<Re[A]>1.06$で、$A=1$ からのずれを圧縮することが出来ていることがわかる。$\delta A=\sqrt{\delta V}\leq 0.05$ であり、5%以内のずれに抑えることができている。$\delta A$ には $Im[A]$ も含まれており、$Im[A]\approx 0$ も実現していることに留意しなければならない。

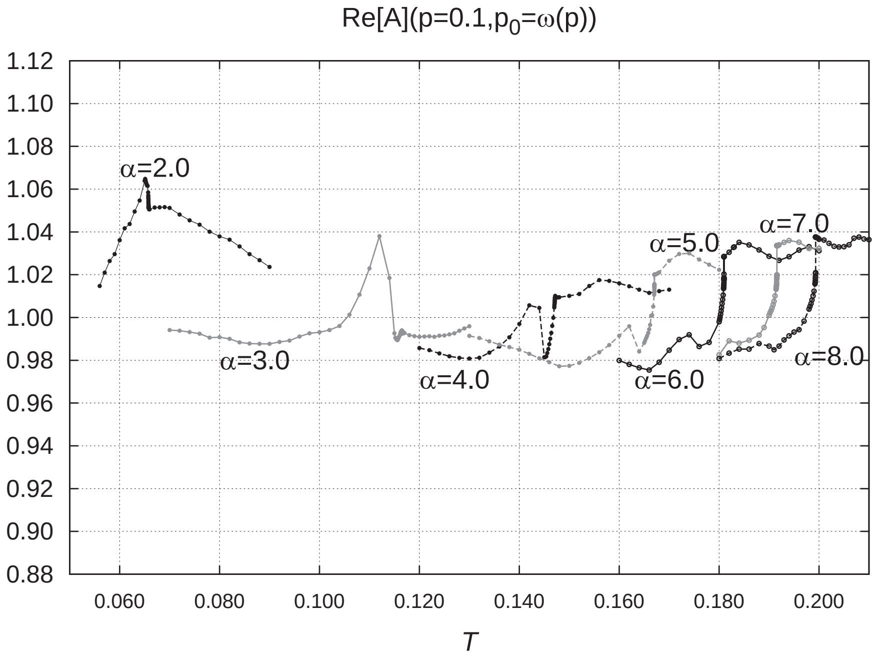


Figure 1: $\alpha=2.0-8.0$ で、WT 恒等式を満たす解の $A(p=0.1,p_0=\omega(p))$ を、温度 $T$ の関数として描いたグラフ。$A=1$ からのずれは、非常に小さい範囲に抑えられている。

$A=1$ からのずれは、基底数を増やしたり、スケール幅 $\lambda$ を各 $(\alpha, T)$ ごとに最適化したり、$\xi(q_0)$ の関数形の選択を変えたりするなど、いくつかの試みによって、より小さくすることは可能である。しかし、多大な計算時間を要することになり、数値計算の改善を俟って行うことにする。

次に、WT 恒等式を満たす DS 方程式の解による臨界曲線を Figure 2 に示そう。$\alpha=2.0$ − 8.0 の臨界曲線を温度 $T$ の関数として描いている。前稿で示したように局所的ゲージでは、秩序変数の採択によって臨界温度や臨界指数が変わることはなかった。ここでは、$p=0.1, p_0=0$ での $C$ の値を示すことにする。$\alpha \leq$ 4.0 の低結合・低温領域では、2 次相転移の臨界曲線のように見える。しかし、$\alpha \geq$ 5.0 の強結合・高温領域では、急激な $C$ の減少を示し、臨界点付近では 1 次相転移のようなギャップが現れる。このギャップが 1 次相転移の証左であるのかは、有効ポテンシャルなどの分析を俟たなければならない。

このような性質は、基底の数、展開関数の選択によって、変わることはない。結合係数 $\alpha$、温度 $T$ に依存する、WT 恒等式を満たす$\xi(Q)$ の採用がこのような臨界曲線を生み出すと考えられる。

最後に、WT 恒等式を満たす DS 方程式の解によって描かれる相図を示そう。前稿と同様に $T-1/\alpha$ 平面での相図 Figure 3 を示す。Landau ゲージと Feynman ゲージでの相境界を比較した場合、両者に大きな差はなかったが、WT 恒等式を満たすゲージを用いた結果は、それらと大きく異なる。凝縮相（Broken Phase）がより広く存在しており、WT 恒等式を満たす解では、カイラル対称性の破れが起きやすいことを意味する。この傾向も基底の数、展開関数の選択に大きくは依存しない。WT 恒等式を満たす非局所ゲージを用いた結果、カイラル対称性が破れやすくなったといえる。

## V　Discussion

今回得られた臨界曲線は、低温・低結合領域では 2 次相転移の様相を示し、高温・強結合領域では 1 次相転移で見られるギャップのような秩序変数の鋭い減少が観察された。これは、Landau ゲージやFeynman ゲージのような局所的ゲージでは見られない振る舞いであり、非局所的なゲージを取り入れた結果によるものと考えられる。この傾向は、温度 $T$ を固定した $\alpha$ の関数として描いた臨界曲線にも見られる。基底数を増やしたり、展開関数を変えて Hermite 型にしても変わらないので、温度・結合定数ごとに WT 恒等式を満たすよう最適化した非局所的ゲージの採用によるものである。

最適な展開関数がどのようなものであるかの考察は難しい。$\xi(Q)$ の満たすべき境界条件が明確でないからである。$V$ を最小にするものが望ましいが、スケールを決める定数 $\lambda$ の最適な選択をしたうえで 考察しなければならない。しかし、計算時間の問題で、$\lambda$ の最適化を各 $\alpha, T$ ごとに行うことはできていない。また、凝縮相と対称相 (Symmetric Phase) では、解の傾向も異なる可能性がある。実際、相転移点において、$A$ の振る舞いには特異性があることが読み取れる。適切な非局所的なゲージの選択に関して、相転移点の前後で特異性が生じている可能性がある。これは、強結合・高温で臨界点近傍の臨界曲線の特異な振る舞いにも関係すると考えられる。

基底数の増加、展開関数の最適化のほかに、3 次元運動量 $q$ の関数展開の導入によっても、

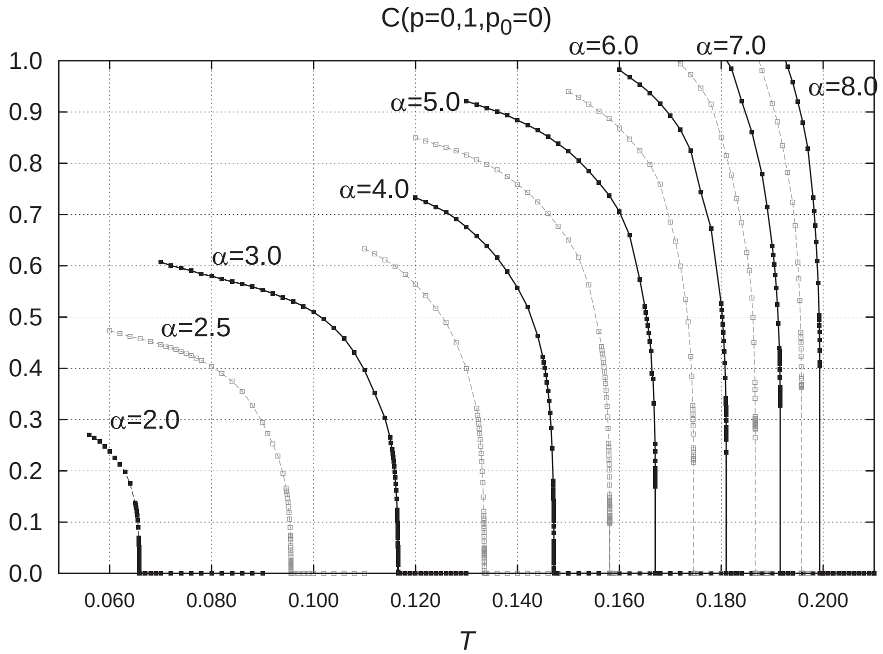


Figure 2: 結合係数 $\alpha = 2.0 - 8.0$ での臨界曲線 $C(p = 0.1, p_0 = 0)$ を温度 $T$ の関数として描いたグラフ。$\alpha$ の間隔は 0.5 である。$\alpha \leq 4.0$ では、２次の相転移のようにふるまっているが、$\alpha \geq 5$ では、相転移点近傍でギャップが生じ、１次相転移のような性質を示している。

$A(P)$ の WT 恒等式の改善が期待される。数値積分での角度積分の困難さのため、今回は取り入れることはできなかった。今回の $q_0$ の関数系の基底数 11 での簡便な計算でも、$A(P) = 1$ からのずれを 5%以内に抑えることが出来ているが、計算のさらなる改良が見込まれる点である。

前稿 [2)] では、臨界指数が一様に $\nu = 0.5$ であったが、非局所ゲージでの計算結果からは、臨界指数を求めることができなかった。相転移点近傍での $C$ 等秩序変数の振る舞いが十分にスムーズでないため、臨界指数を決めることができないのである。ゲージ $\xi(Q)$ を温度に依存して求めることになり、数値的にわずかな変動が生じるためである。従って、$\alpha \leq 4.0$ の低結合領域では、２次相転移のように振る舞っているものの、臨界指数を持つような相転移であるかどうかも疑わしいと考えなければならない。$\alpha \geq 5.0$ の強結合領域では、１次相転移のような振る舞いからも分かる通り、臨界指数により決まる漸近形をしていないと考えられる。非局所的ゲージ決定の自由度が増えたり、より最適な関数での展開ができた場合、よりスムーズな相転移が起きる可能性はある。より単純なモデルでの計算などによって確認することも有効だろう。

WT 恒等式を満たす解の相転移点から求められる相境界も、フーリエ展開、Hermite 型の展開、その基底数の増減による相違は小さい。非局所ゲージのより適切な選択によっても大きな差異は生じないと考えられる。実際のゲージ $\xi(q_0)$ の値は大きくはない。前稿の Landau ゲージから Feynman ゲージまでの計算に用いた値 $(0 \leq \xi \leq 1)$ から大きく外れない。それにもかかわらず、相構造が Landau ゲージや Feynman ゲージと大きく異なるのは驚くべきことである。ゲージの非局所性と WT 恒等式 $A(P) = 1$ が非自明な相境界の振る舞いを惹き起こしていると考えられる。

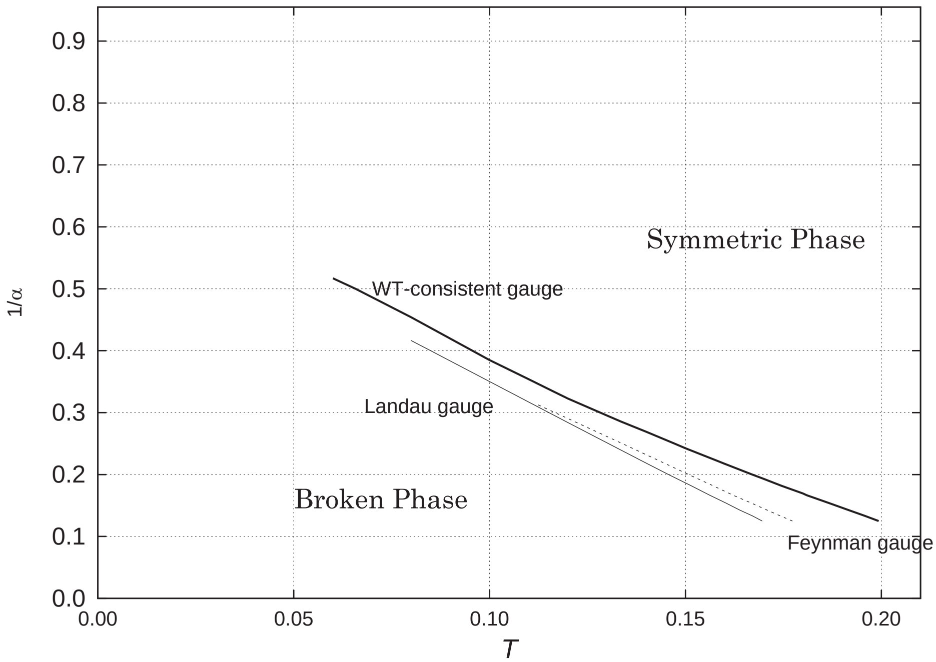


Figure 3: $T - 1/\alpha$ 面での対称相 (Symmetric Phase) と凝縮相 (Broken Phase) の相境界。WT 恒等式を満たす解 (WT-consistent gauge) では、凝縮相が Landau ゲージ (細実線)、Feynman ゲージ (破線) と比べて広がっている。

## VI Summary

本稿では、ゲージ不変性と同値な Ward-Takahashi 恒等式を満たす解を与える非局所的ゲージを用いて DS 方程式を解き、有限温度 QED のカイラル相転移現象を解析した。前稿での Landau ゲージ、 Feynman ゲージでの結果と比較することにより、非局所ゲージ、および、ゲージ対称性あるいは WT 恒等式 $A(P) = 1$ の影響を調べた。

WT 恒等式を満たす非局所的ゲージを求めるため、ゲージパラメーター $\xi$ を適当な関数により展開する方法を採用した。DS 方程式の逐次的解法の過程で、非局所ゲージの展開係数の連立 1 次方程式を解くことにより、WT 恒等式を満たす解を得た。$A(P)$ の 1 からのずれを最小にする手法でも、連立 1 次方程式に帰すことができ、非常に簡便な方法を開発することができた。WT 恒等式のすべてを満たしているわけではなく、また、有限の基底数により、近似的に WT 恒等式を満足するのみであるものの、この拘束条件によって、Landau ゲージおよび Feynman ゲージとは質的に異なる性質を示すことは注目すべきことである。得られた結果を以下にまとめる。

i) 非局所的なゲージの採用によって、$A(P)$ の 1 からのずれは 5%以内に抑えることができている。 $q_0$ の関数の基底数 11、固定したスケール $\lambda$ でのフーリエ展開という、最小限の自由度の導入にも関わらず、このような小さなずれのみに抑えた Ward-Takahashi 恒等式を実現できた。

ii) 得られた臨界曲線は、低結合・低温領域では 2 次相転移の様相を示すが、強結合・高温領域

では相転移点近傍での鋭い秩序変数の減少を示し、1 次相転移の様相に近づく。温度・結合係数に依存する非局所ゲージの採用による非自明な振る舞いである。

iii)Landau ゲージ、Feynman ゲージとは大きく異なるカイラル相転移の相図を示す。より広い凝縮相が出現し、カイラル対称性の破れが起こりやすくなっている。非局所的なゲージの数値的大きさを考慮すると、2 つの局所的ゲージとの差異は非自明である。ゲージ対称性、あるいは、Ward-Takahashi 恒等式という拘束条件の重要性を示している。

この解析は、QCD での有限温度カイラル相転移現象に適用されることが期待される。Running coupling を導入し、精度の高い、観測データとの比較が可能な堅牢な分析結果を与えることが、今後の目標として課されている。

## Acknowledgement

本研究での数値計算は、京都大学基礎物理学研究所大型計算機システム SR16000 を利用して行われた。

## References

1) Y. Fueki, H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida (2003), Prog. Theor. Phys. **110**, 777; H. Nakkagawa, H. Yokota, K. Yoshida and Y. Fueki (2003), Pramana – J. Phys.,**60**, 1029, proc. of the Fourth International Conference on Physics and Astrophysics of Quark-Gluon Plasma (ICPAQGP-2001), Jaipur, India, November 2001, eds. B. Sinha, D. Srivastava and Y. P. Viyogi; H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida(2010), Bulletin of Research Institute of Nara Univirsity **18**, 1;H. Nakkagawa, H. Yokota, and K. Yoshida(2012), Phys. Rev. **D86**, 096007;. ibid. **D85**, 0310902.

2) K. Yoshida and H. Yokota (2015), Memoirs of Nara Univirsity **43**, 61.

3) I. Arsene *et al.*(2005), Nucl. Phys. A757, 1 ; B. B. Back *et al.* (2005), Nucl. Phys. A757, 28; J. Adams *et al.* (2005), Nucl. Phys. A757, 107; K. Adcox *et al.* (2005), Nucl. Phys. A757, 184.

4) A. Bazavov *et al.*(2012), Phys. Rev. **D85**, 054503; H. Saito, S. Ejiri, S. Aoki, T. Hatsuda, K. Kanaya, Y. Maezawa, H. Ohno and T. Umeda (2011), Phys. Rev. **D84**, 054502.

5) O. Philipsen, and C. Pinke(2014), Phys. Rev. **D89**, 094504.
P. de Forcrand, and O. Philipsen(2010), Phys. Rev. Lett. **105**, 152001.

6) K.-I. Aoki, K. Morikawa, J.-I. Sumi, H. Terao, M. Tomoyose (1997), Prog. Theor. Phys. **97**, 479 ; *ibid.* (1999) **102**,1151; *id.* (2000), Phys. Rev. **D61**, 045008.

7) A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto and G. Pettini(1990), Phys. Rev. **D41**, 1610; S. K. Kang, W.-H. Kye and J. K. Kim (1993), Phys. Lett. **B299**, 358; K.-I. Kondo and K. Yoshida (1995), Int. J. Mod. Phys. **A10**, 199. K. Fukazawa, T. Inagaki, S. Mukaigawa and T. Muta (2001), Prog. Theor. Phys. 105, 979; M. Harada and A. Shibata (1998), Phys. Rev. **D59**, 014010.

8) V. V. Klimov (1981), Solv. J. Nucl. Phys. **33**, 934, *id.* (1982) Sov. Phys. JETP 55, 199; H. A. Weldon (1982), Phys. Rev. **D26**, 1394; *ibid.* (1982) **26**, 2789.

9) L. V. Keldysh (1964), Zh. Eksp. Theor. Fiz. **47**, 1515[Sov. Phys. JETP 20 (1985), 1018.] K.-C. Chou, Z.-B.

Su, B.-L. Hao and L. Yu (1985), Phys. Rep. 118, 1.
10) T. Maskawa and H. Nakajima (1974), Prog. Theor. Phys. **52** (1974), 1326; *ibid.* (1975) **54**, 860.
11) T. Kugo and M. Mitchard (1992), Phys. Lett. **B282**, 162

## Summary

We solved the Dyson-Schwinger equation consistent with the Ward-Takahashi identity which is equivalent to the gauge-invariance condition. We adopted the nonlocal gauge function $\xi(Q)$ such that the WT identity holds. We obtained such a gauge function by expanding it in terms of appropriate basis functions to avoid the difficulty of dealing with an integral equation. The constraint given by the WT identity is reduced to linear equations of the coefficients of the basis functions, which is easy to solve numerically. By using the thus obtained gauge function at each step of the iterative computing procedure, we eventually obtain the self-consistent solution of the DS equation and the gauge function $\xi(Q)$ which satisfy the constraint. The phase structure and the transition properties of the chiral symmetry breaking with the nonlocal gauge are found to be qualitatively different from those obtained by using the local gauges, namely Landau and Feynman gauges.

【Key words】 Chiral Phase Transition, Gauge Invariane, WT indentity