空間についての覚書き

高　山　淳　司*

Bemerkungen zur Probleme des Raums

Junji TAKAYAMA

(Received September 30, 1975)

(1)

空間の認識は先天的か,経験的か,それとも規約にもとづくものか．この漠然たる問はさらに，いかなる意味における空間のいかなる契機についてこのように問われているのかが明確にされねばならない．カント以後非ユークリッド幾何学の展開と共にこの問題は盛んに論じられ，さらに相対性理論の出現は議論の具体性と奥行きとを増大せしめた．小論はカントの思想から出発し，ポアンカレ，カルナップ，ライヒェンバッハ，グリュンバウム等，哲学の側からこの問題を追求した人々の所論を手引きとしながら若干の所見をつけ加えんとするものである．

カントは『純粋理性批判』において，空間はわれわれの心の中に先天的に見出される純粋直観であるとした[1]．厳密に云えば，純粋に感性に属するものは，感性的直観一般の純粋形式としての空間であり，幾何学において用いられるような対象として表象される空間，すなわち純粋直観としての空間は悟性による表象統一を含んでいるとされるが[2]，ここではそれに立入ることをしない．幾何学はかかる空間の性質を先天的総合的に規定する学であり，経験によっては与えられない必然性をもつといわれる．かかる必然的認識としての幾何学の内容は何か．空間の三次元性が必然性の意識と結合していることが強調されている．そしてもしこれが経験からえられた認識なら，われわれは「今まで知られた限りにおいては3次元以上をもつような空間は見出されなかった」としか云えないと述べられている[3]．一方当時はユークリッド幾何学が唯一の幾何学であったから,ユークリッド幾何学という語はことさらには用いられていないが，当然それが考えられている．三角形の内角の和が二直角であることに触れていることはその裏付けをなす[4]．要するにカントの先天的直観としての空間は三次元ユークリッド空間である．

このように幾何学を直観にもとづくものとした点で，カントはライプニッツと大いに異っている[5]．ライプニッツの立場は，幾何学をも含めて数学はすべて矛盾律に還元される，幾何学の公理もまた矛盾律のみによって証明できるとするものである．彼は云う，「矛盾律または同一律だけで算術全体と幾何学全体，すなわち数学の原理全体を証明するのに十分である[6]」．事実，彼は『人間悟性新論』で2＋2＝4を矛盾律のみによって証明して見せ[7]（真の証明になっているかどうかは別として），さらに『弁神論』では空間の三次元性も同じ手段で証明しうると明言しているのである[8]．もしライプニッツのこの思想が正しければ，幾何学はいかなる意味でも――単に思惟可能という形式的意味においてさえも――ただ一つしか存在しえない．例えば矛盾律からユークリッドのすべての公理が演繹されるとすると，これと矛盾する非ユークリッド幾何学は，ヒルベルト的な形式主義の立場に立ってさえ可能でない．カントの数学論の特徴の一つは，公理のかかるライプニ

* 外国語研究室

ッツ的見解をくつがえし，思惟と公理との直結を打ち破って直観を挿入したことにある．

カントによれば，例えば二直線によって囲まれた図形（二角形）といえども思惟可能であり，論理的には矛盾しない[9]．したがって二点を通る直線は一本に限るという絶対幾何学の公理を否定しても矛盾律には反しない．ライプニッツにとって公理は将来証明可能なものとして結局定理という身分に落着くべきものであるが，カントにとっては公理は決して証明されえず，あくまで公理としての地位を保持する．マルチンはこのことを「カントは公理的立場に立っている」と表現した[10]．こうしてカントによれば二角形は思惟可能である，しかしこれを直観することは不可能であるとされる．「数学的認識は概念の構成による認識である．概念を構成するとは概念に対応する直観を先天的に描き出すことである[11]」．二角形の概念は空間という先天的直観中に描き出すことができない．カントが友人ランベルト等を介して非ユークリッド幾何学についてどれだけの予感を持っていたかは，現在まだ確定されていない．しかし上の表現を用いると，カントの立場は次のようになる：非ユークリッド幾何学は思惟可能である，しかしそれを直観すること，構成することはできない．その意味で非ユークリッド幾何学は本来の数学的存在をもたず，ユークリッド幾何学のみが真であるといえる[12]．

一方カントはニュートンの絶対空間の思想にも反対した．空間・時間の（主観を超えた）絶対的な実在性を主張し，しかもニュートンのようにこれを実体と考えるならば[13]，「空間と時間は一切の現実的なものをみずからの内に包括するためにのみ存在する永遠無限で独立自存する二つの不合理不可解なものということになる[14]」．しかしカントが続けて，「このように空間と時間を実体とみなそうとする人々は数学的主張に現象の領域を開放するという有利な点をもっている．ところがもし悟性が現象の領域を越え出ようとする場合には，他ならぬこの条件のために非常な困惑に陥る」と述べているように，この批判は空間・時間の存在論的側面に関するものであり，特にこの空間・時間の実体視が時空をすでに出来上がったもの完結したものとして与えられている無限物とみなすとき，二律背反が生じて矛盾が露呈されると考えているが，これに反し現象的領域ではニュートン的立場はむしろ有利なものと評価されているのである．事実，経験の根本的な原則が主観的なものであるか，それとも客観的起源をもつものであるかは，本質的には同じことがらの二つの異る表現にすぎないとも考えられる[15]．空間がニュートンのいうように主観を離れて独立な絶対的存在をもっているにせよ，カントの説のように我々の心にそなわる先天的直観にもとづくにせよ，必然的なユークリッド空間が存在し，その中のある位置において外的対象が実在し，出来事が生じることには変わりがない．ニュートンでもカントでも空間とは出来事に対する絶対的な枠として，いわば無限の大きさをもった格子状結晶体であり，長さの単位を備えうる不動の座標軸を持っていて，絶対的な大きさがそれに関して定められうるようなものである．

ところでヤスパースはカントの空間論を評して「我々はカントとは別に，第一に心理学的に研究されるべき空間直観，第二に物理学的客観的空間，第三に数学的空間を区別している．カントは非ユークリッド幾何学の非直観的な諸空間について何も知らなかった．彼は全くユークリッド的でない直接的直観的心理的な空間を，ユークリッド的三次元的間接的直観的な空間からまだ区別していない[16]」と述べている．ここに我々は種々なる意味における空間を区別し，そのいずれについて議論しているのかを明確にすることの必要性を知らされる．カルナップもその『空間論』において，形式的空間，直観的空間，物理的空間の三種を区別し，その下に多くの亜種空間を置き，かかるさまざまな空間の起源と相互

関係を論じた[17]．カルナップの規定によれば，形式的空間は一般的な秩序構造（Ordnungsgefüge）であって，それは限定された対象（感性的な対象にせよ，非感性的な対象にせよ）の間の秩序構造ではなく，無限定な関係項の間の関係構造を意味する．次に直観空間は，ふつうの意味での空間図形の間の関係構造である．それらの図形の間の性質を我々は感性的知覚や単なる表象を機会として把握するが，それは未だ経験的現実の中に存在する空間的事実でなく，図形の本質が扱われるのみであるという．最後に例えばこの物体のこの角と他の物体のあの角との空間的関係のごとき経験的に見出される事実が物理的空間の構造をなすと述べられる．物理的空間の認識は直観空間の認識を前提とし，直観空間の構造の純粋形式は形式的空間中に予示され，形式的空間は直観空間の思考的前提をなしているという．

かく三種の空間の規定と関係とを示したのち，これらの空間の認識が何にもとずくかを探究しようとするのがカルナップの『空間論』のプログラムである．

ヤスパースとカルナップの分類を対照してみると，ヤスパースが数学的空間と称したものは，非ユークリッド幾何学の非直観的な諸空間というややあいまいな一例しか挙げられていないが，一応カルナップの形式的空間と同一視しうるであろう．我々は空間概念の一種類としてかかる空間を認めるべきであると考える．

この形式的空間を例を用いてさらに明確にするために，カルナップ自身の挙げる例よりもさらに単純だという理由で，ワイルダーから次の公理系を借りて考察してみよう[18]．

無定義用語：点・線
公理１．すべての線は点の集合である．
公理２．少くとも２つの点が存在する．
公理３．p，q が異る点であれば，p，q を含む線が１つ，しかも唯１つ存在する．
公理４．Lが線ならば，Lの上にない点が存在する．
公理５．Lが線で，pがLの上にない点ならば，pを含みLと点を共有しない線が１つ，しかも唯１つ存在する．

ワイルダーはこの公理系をΓと名づけている．Γは無定義用語：点・線を含んでいるが，これは便宜上ふつうの幾何学的用語を用いただけで，５つの公理によっての他は何の限定もされていないから，点・線という語の代りに他の語を用いてもよいし，あるいは第一類のもの，第二類のものと呼ぶことにして，公理１：すべての第二類のものは第一類のものの集合である，公理２：少くとも二つの第一類のものがある，等々と書きかえても Γには何の変わりもない．したがって Γが定める空間は上述のカルナップの形式的空間の規定の云うとおり，無限定な関係項（Γ では点・線と名づけられている）間の関係構造である．Γの無定義用語：点・線にある一定の意味を与えた場合，公理１～５がすべて正しい命題となるならば Γに「解釈」が与えられたというが，ふつうのユークリッド平面幾何学での点と線という意味を Γの無定義用語「点」「線」にそれぞれ与えるならば明らかに公理１～５はすべて成立し，Γ の一つの解釈が与えられる．ところが貨幣が４枚ある場合，貨幣を点とよび，２枚の貨幣の集合を線とよぶことにすると，公理１～５はやはり成立し，ここに Γの別の解釈が与えられる．「したがって形式的空間において対象として扱われるものは三角形・円などの空間的図形ではなく，意味のない関係的一般物であり，数・色・近親等級・円・人間などのさまざまなものが，それらの間に一定の形式的条件を充たす関係が成立する限りで，この一般物の代わりに登場しうる[19]」というカルナップの形式的空間の説明は，この事実を的確にとらえている．

上記Γはきわめて単純な公理系で，実際的意義をほとんど持たないものであったが，次にヒルベルトの『幾何学の基礎』[20]における有名な公理系を考えてみよう．『幾何学の基礎』は次の言葉で始まっている．「我々は3種の異るものの集まりを考える．第1の集まりに属するものを点といい，A，B，C…で表わす．第2の集まりに属するものを直線といい，a，b，c…で表わす．第3の集まりに属するものを平面といい，α，β，γ…で表わす」．この後に5群20個の公理が続いている．これはもともと3次元ユークリッド幾何学を建設するために必要十分な公理系としてヒルベルトが創ったものであるが，上の引用で見られるとおり，その無定義用語が限定的な直観ないし対象を表示していないことは，Γの場合と同様である．ヒルベルトの公理系は完備公理系であることを目指し，その意味で同型的解釈しか容れないという点でΓと異っているにせよ，ヒルベルト自身，自己の点，直線，平面の代りに，机，椅子，コップと云ってもかまわないと述べたと伝えられている[21]．この点でユークリッドの『原論』の冒頭の定義：「点とは部分を持たないものである．線とは幅のない長さである．…面とは長さと幅しか持たないものである．…[22]」がある限定された直観を想定しているのとは対照的である．ユークリッドの定義は真の定義とは云えぬものとして，その不完全さはしばしば指摘されたが，ユークリッドの考える点•線•面などは単に概念的なものでなく直観的なものであり，一般に直観的なものは，その形式的性質は概念的に把握できても，その特殊な斯在（So-sein）は概念化されえないから，かかる暗示的手法によって「定義」し，理解せしめる他はなかったのである[23]．すなわち概念的定義としては欠陥を持っていることこそ，ユークリッドの点・線・面などが，ヒルベルトのそれと違って，直接に直観的なものであることの指示である．話を戻して形式的公理系について云えば，そこでは公理群の無矛盾性のみが要求される．数学的体系とはかかるものであり，それが空間とよばれるべき若干の性質を持っておれば（例えば距離ないし近傍が要素間に定義されておれば），形式的または数学的空間とよばれうるであろう．この意味ではヒルベルト的な，形式的に見られたユークッド幾何学も，種々なる非ユークリッド幾何学も無矛盾の形式的空間体系として成立する．すなわち歴史的順序で云えば，非ユークリッド幾何学の無矛盾性はユークリッド的モデルを介してユークリッド幾何学の無矛盾性に帰せられた．一方ユークリッド幾何学の無矛盾性は座標幾何学を介して数論の無矛盾性に帰着せしめられている．かくしてユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学との無矛盾性は同じ確実性をもち，形式的体系としては全く同等の権利を持っている．それでは例えば公理系Γや，ヒルベルトの形式的公理系が，ユークリッド的直観的な点，直線などにより解釈を与えられるとはどういうことであるか．カルナップが，「ふつうの意味での空間図形の間の関係構造」と規定した直観空間であるユークリッドの『原論』の想定する空間は，かかる解釈を与えられたヒルベルトの公理系による空間と等値なものである．ところでカルナップの直観空間の特徴は非経験的色彩が著しく強いことである．彼は云う，直観空間の「公理は経験から独立である，より詳しく云えば経験の量から独立である．すなわちこの公理の認識は，経験的命題と異り，経験を何回もくりかえすことによってますます確かめられるということがない．フッサールが示したように，ここでは経験的現実の意味での事実が問題なのではなく，ある所与の本質（エイドス）が問題であるが，この本質はその特殊な斯在において一回与えられることによってすでに把えられうるからである[24]」．このフッサール的本質直観としての単一の直接経験によって直観空間が把握されるという理論は，カントの純粋直観の説ともほぼ一致しているが，グリュンバウムによって新カント派的偏見であると批判された[25]．それではかかる現象学的アプリオリとし

ての本質直観が存在して，例えばヒルベルトの公理系の解釈を与えているというのは偽りなのであるか．我々はたしかにかかる直観を，空間意識を持って居るように思われるのであるが．

カルナップはこの本質直観から出発して，全直観空間の建設を次のように行った[26)]——直観はつねに制限された空間領域にのみ関係する．この直観にもとづいて，近接した領域に対してヒルベルトの公理群の成立が述べられる．次いでこの基礎の上に制限されない全空間の構造が築かれる．このときには，完全性と言明相互間および基礎にある直観的言明との無矛盾とが要求される．かかる条件の下ではあるが，我々は全体領域への拡張に関しては自由を持っているとされる．

以上により建設された直観空間において，小領域ではユークリッド幾何学が成立する．例えば平行線公理も近接領域について成立する公理に数えられる：「一平面における近接した2直線が交わらないならば，他の任意の直線がそれらと交わって生じる2つの同位角は等しい」．この小領域のユークリッド幾何学を全体空間に拡張する際には，種々なる正負の値の曲率をもった非ユークリッド幾何学も可能であるとされる．この構築はリーマンのいわゆる「最小部分における平面性〔ユークリッド性〕」を考慮するとともに，アインシュタイン以後，物理空間としての非ユークリッド空間がもはや無視しえない以上，その基礎をなす非ユークリッド直観空間も否定しえないという事情によくマッチしている．ポアンカレは，先天的直観は強力であるから，それに反するような幾何学は考えられないとして，先天的直観をもし認めるならば唯一の幾何学が帰結すると考えたに違いないが[27)]，これに反してカルナップは，本質直観を認めつつ幾何学の多数性をも許容するような精妙な工夫を案出したと云える，しかしそれだけにある作為性も感じられるのである．我々は何らかの原因でユークリッド的な直観を持っているわけだが，この直観により直線外の一点を通おる平行線は一つあり，そして唯一つに限ると直観するのである．その場合，カルナップの主張するように直線と一点が近接しているときには平行線は唯一つ存在するが，近接していなければ何とも断定しえないという事情にあるとは考えられない．2点を通る直線は一つより多く存在しないという公理についても，その2点が近接しているか否かには関係なくこれを認めるような直観を我々は持っていると云えるだろう．すなわち常識的な意味で我々が持っているといわれる直観は，唯一つの幾何学しか許さないものであると思われる．この直観こそ上記公理系の解釈を与えるものである．しかし我々はこの直観を先天的，本質的直観であるとは考えない．ポアンカレも我々の直観を先天的と見ることに反対し，我々の生活する物理的環境が，特に固体の行動が，我々にユークリッド幾何学を採用させ，それに応じた直観を与えたのだと説明し，他の物理的環境に置かれている人間はそれに応じた直観と幾何学とを持つであろうとした[28)]．例えば半径Rの大きな球があり，その内部の点における絶対温度Tは，その点と中心との距離を r とすると R^2-r^2 に比例し，球の表面では0度になっているとする．さらにこの球内のあらゆる物体の膨張係数はTに比例すると仮定する．その他，光線の屈折率などにも適当な仮定を行なうと，この球内の人間のもつ幾何学は双曲的な非ユークリッド幾何学になるであろうと論じている．さらに我々の世界においてもある種の練習によりユークリッド的でない直観を身につけることができるだろうと主張する．またライヒェンバッハも，我々のふつうの生活における物理的空間のもつユークリッド性に我々が個体発生および系統発生的に適応した結果として我々はユークリッド的直観をもち，非ユークリッド的関係は反直観的に思われるにすぎないと主張する[29)]．いずれにせよカルナップの「本質直観」なるものは，我々の視覚を中心と

する感覚による空間把握を基礎にして築かれたものであって，経験に由来すると考えられるべきであり，またかかる直観様式が我々のものになった後は，くりかえしによってますますこの様式を確かめる必要がないのは当然であり，かかる意味での「経験の量からの独立」は，それが本質直観であることを証明するものではない[30].

ところでグリュンバウムは，カルナップの直観空間を直接的視覚空間とあまりにも直結しすぎている.「視覚空間の性質に関する我々の知識の説明として現象学的アプリオリは役に立たない.」「我々の目の活動によって与えられる本質直観は経験的認識を生じると主張されねばならない[31]」などのカルナップ批判の言明がそれを示している．我々は上述のように両者のつながりを否定するものではないが，直接的私的視覚空間と，間接的に組立てられた公共的直観空間の区別は当然保持されねばならない．ヤスパースも先に引用したように,「直接的直観的心理的空間」と「ユークリッド的三次元的間接的直観的空間」の区別を語った．ヤスパースによっても前者は全くユークリッド的でないと云われているが，さらにルネバーグ等の実験的光学的研究は両眼視の空間が定曲率双曲空間であることを教えている[32]．かかる私的な非ユークリッド空間がいかにして公共的なユークリッド空間にまで構成されるのかは一つの問題である．ポアンカレも視覚・触覚・運動感覚などからいかにして間接的直観空間がえられるかという問題に対して特に大きな努力を払っている[33].しかしこの小論ではこの問題には触れないことにする．ところで，ニュートンのいう相対空間についても，「それは私的な知覚空間であって，公的な容観的空間である絶対空間に対置されている」と云う議論は成立しない．相対空間は「絶対空間と形と大きさを等しくする[34]」と明確に述べられているとおり，あくまで公共的空間であり，ただ絶対的な不動の原点によらず，地球などの相対的事物をかりに原点と定めているというだけの差にすぎない．プリンキピアの体系には，私的な知覚空間の占めるべき場所はない．カントにおいても純粋直観としての空間は知覚空間ではありえない．カルナップの直観空間もまたそう解されるべきである.

ところでカントにおいて空間は，単に純粋直観であるにとどまらず物理的空間である．彼にとって数学的存在は単に主観的である場合には意義をもたず，経験的な客観性を具えていなければならない．よって単に思惟可能であるにすぎない形式的空間はもとより，純粋直観中に構成可能な空間的形象といえども，それが現実的な経験的直観と結びつきうることによってはじめて意義を有するのである[35].換言すれば,数学的空間は（純粋直観を介して）物理空間と合致してはじめて，あるいは合致するからこそ意義をもつのである．我々もカントと共に物理的空間を考察の中心に据えて行くことにしょう.

（2）

ガウスが，物理的空間にいかなる幾何学が妥当するかを決定するために，三つの山頂をつなぐ光線三角形の内角の和を測定したことは有名である．内角の和が180°であればユークリッド幾何学が，180°より小さければロバチェフスキー的な非ユークリッド幾何学が，180°より大きければリーマン的な非ユークリッド幾何学が成立するということになろう……(A)．この実験は経験によって幾何学を確定しうるという信念のあらわれであるといえよう．ところでガウスの得た結果は180°であった．これは観測の誤差を考慮すれば，観測された空間の幾何学はユークリッド幾何学であるか，非ユークリッド幾何学としても，ユークリッド幾何学にきわめて近似した（すなわち曲率が0に近い）ものであることを意味す

るだろう．しかし次の反省が直ちに生じて来る．光線の径路が直線であり，観測計器が剛体であるとしてはじめて上記の(A)が云える．したがってかりに観測結果が180°以外の値を示したとしても，光線の径路が直線でなかった等の説明をすることにより，ユークリッド幾何学を保持することができるであろう．それゆえ物理的空間はユークリッド的であるか，非ユークリッド的であるかの問はそれだけでは意味をなさず，何を直線とみなすかについての定義が前提として必要で，それを定めた上ではじめて答えられうるものである．空間の幾何学の決定は直線についての規約にもとづくことを説いたのはポアンカレである．ある幾何学を採用することは真偽の問題ではなく，便・不便の問題である，我々はユークリッド幾何学を採用しようと思えばそれに応じた直線の定義を定めうるし，非ユークリッド幾何学のある一つを採用しようと思えば直線の他の定義をとればよいのであると彼は主張した．彼のこの説の影響は大きく，コンベンショナリズムなる言葉は彼の名と結びつけられている．

一方カルナップは，物理的空間においてある線が，例えばこの物体のこの辺が直線であるという言明はいかにして可能かという問からはじめる[36]．我々は定規または光線をこの辺に当ててみることによりこれを確かめる．それでは定規または光線が直線であることはどこから知られるか．結局それは規約によらざるを得ない．一定の自然対象のクラスを直線とみなすと直接に宣言することをカルナップは「直線措定」といい，これに「計量措定」を対置させる．計量措定とはいかなる物体を剛体とみなすかという措定である．ここでカルナップを離れて，ある物体が剛体であるか否か，すなわちその長さなどが不変であるかどうかはどうして知られるかと問うてみよう．もし我々がニュートンの絶対空間の立場に立てば，不動の座標系が存在していることになるから，この空間中の物体の長さにはこの座標系にもとづいてある絶対的な数値が与えられるであろう（単位は定めねばならない）．ただし我々がこの値を認識しうるか否かは別であるが．しかし我々がかかる空間を認めないならば，物体の絶対的な長さは，比較すべき不動の基準がないから，単に知りえないというのではなく，我々が定義を与える迄はこの語は意味を持たないのである．二本の棒が両端とも一致しているときは，両者の長さは等しいと云ってもよいであろう．両者が異る位置にあるとき，長さの比較は可能であろうか．一方を動かして他方に重ねて比較するとすれば，動かされた棒の長さが移動に際して不変であるという仮定を置かなければ比較できないことになる．同じ位置にある一本の棒でさえ「異る時刻において長さが不変である」という言明は意味をもたない．この棒が同じ長さを保っているかどうかは，ある規準と比較してて定められるが，何を規準とするかが定義されていないからである．もっとも「同じ位置にある」も相対的概念であって，この棒と接している他の物体に対して動かないという状況にあるのなら，それら二物体は相対的に同一の長さを保ちつづけているとは云えるであろう．一本の棒が移動に際して不変の長さを保っているか否かも，さまざまな位置における棒の長さを定義してはじめて定まる．例えばその棒の長さそのものを不変であると定義するならば，この棒の長さはどこにあっても一定であり，この棒は（長さに関して）剛体であるということになる．われわれの世界における固体は（ゴムやばねなどを除いて）すべて剛体であるとみなしても，日常的な正確さの範囲ではその長さの相対関係に矛盾が生じないように行動する．この事実は我々が計量措定を行なう場合に基礎となる重大な事実である．しかしごく卑近な日常性を離れて科学的精密さが求められると，すべての固体を剛体とみなす場合，その相対関係に齟齬が生じてくる．これに反し，すべての固体でなく任意の一つの物体を剛体であると定義することからは決して矛盾は生じないのであるが，

他の固体の長さの表現がいたずらに複雑になるので，科学的精密さが要求される段階では，かかる定義は行われなくなる．例えば標準尺度についても，温度などの影響に対する補正が行われるのが通例になって来る．

ここで再びカルナップに戻り，その計量措定の説明を見よう．一定の物体の上に2定点を選び，これを計量の基準とする．ただし2定点の距離をそのまま不変の単位とするのではなく，ある関数 f (T,φ,λ,h…) を定める． T,φ,λ,h…は物体の温度，位置，方向，圧力などを表わす．この f (T,φ,λ,h…)を二定点の距離であると定義する．これによって計量措定が行われたことになる．計量措定が行われると，ある物理的な線が直線であるかどうかは，それが2点間の最短線であるか否かの測定や，その他の多くの方法によって決定されうる．こうして計量措定は直線性を定めうるが，その上，計量をも与えるから直線措定よりも重要な意義をもつとされる．ポアンカレにも計量措定にあたる考えがなかったわけではないが，直線措定の主張が前面に押し出されていた．カルナップの明確な叙述により，計量措定が（ときには合同の定義という名の下に）主として論じられるようになったのである．ところでカルナップは一つの計量措定を行った場合，空間の幾何学を定める原理的方法を詳細に述べている[37]．鉄片上の2点A，Bを計量の基準と定め，この2点を他の物体上の多くの点と重ね合わせる．かかる手続を続けることによって，他の物体の剛体性，物理的な線の直線性，面の平面性を順次確認して行き，最後にこの平面上の三角形の内角の和を調べ，それによっていかなる種類の幾何学が成立するかを確定する．この際トポロジィ的な言明，すなわち点と点の接触，点が直線の上にあること等々のみの確認によって操作は進行して行く．この一連の操作において，例えば直線性や平面性の確定に際して，ある幾何学，特にユークリッド幾何学の知識が先入見として操作の中に入りこまないことが確かめられている．すなわち点と点の接触のごときトポロジィ的なものは端的に事実であって，何らの計量措定にも関係しないし，いかなる幾何学をも前提していない．かくしてここに提示された手続は，ユークリッド幾何学を前提することなしに空間の幾何学を定めうることを示したものである．

ところが一般の計量措定はもっと複雑であって尺度の物理的補正が必要であり（f(T,φ,λ, h…) で示されるような補正)，その際例えば弾性についての補正であれば，それに必要な物体の面積や体積の算出にはふつうユークリッド幾何学が前提されることになろう．そうだとすると幾何学を定めるための前提である計量措置が，一つの幾何学を前提していることになる．一般に観測機器はユークリッド幾何学を前提として作られているから，それを用いた観測結果として非ユークリッド的結論が出るのは矛盾であるという議論が，ユークリッド幾何学の擁護のためにしばしば申し立てられて来た．しかしある前提からこれに反する結論が生じた場合には，前提が誤っていることが示されたのであり，この場合はユークリッド的前提を訂正しさえすればよいのである．弾性に関する補正の例であれば，結果として生じた非ユークリッド幾何学にもとづいて面積や体積を算出しなおせばそれでよいのである．さらに実際問題としては，かかる小領域においては両幾何学の差は誤差の範囲内であって，何らの修正も必要としないということになろう[38]．

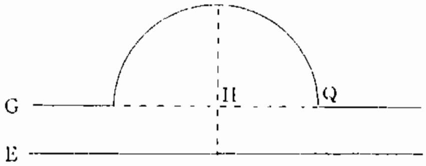
ところでポアンカレは，幾何学は規約にもとづいて定まるものであり，真偽でなく便・不便の問題があるにすぎないと述べたのち，こうつけ加えた：我々はどんな場合にもユークリッド幾何学を最も便利なものとして選ぶであろう[39]．しかし我々はこの部分についてはポアンカレに同意することができない．カルナップもポアンカレのコンベンショナリズムそのものは重要な洞察であると称揚したが，この最後の発言には終始反対しつづけた．

『空間論』において彼は重力場における幾何学について2つの選択肢を提示する[40]．(1)はアインシュタインが選んだものであって，計量措定としてはふつうの物理学と同じ措定を行なう．すなわち尺度の長さは温度・圧力などには依存するが，尺度の位置・方向には依存しないとする．この措定にもとづけば，重力場における空間は非ユークリッド的となる．重力場においては非ユークリッド幾何学が成立するというのは，この前提を省略した粗雑な発言にすぎない．(2)ユークリッド幾何学が成立するように計量措定を行なう．カルナップの結論を述べると，$\ell = \ell_0(1+\beta(T-T_0))(1-3.72\times10^{-29}\,m\cos\varphi/r)$（$\beta$は定数，Tは温度，rは質量mの物体からの尺度の距離，φはこの両者の結合線と尺度とのなす角，単位はCGS，温度以外の影響は省略）となり尺度の長さはr，φの関数として位置と方向にも依存することになる．

ここでポアンカレのようにユークリッド幾何学を選ぶべきなら，(2)の選択肢をとらねばならないことになる．しかし『空間論』は幾何学と計量措定の簡単さ・便利さだけでなく，事実（Tatbestand）の全表現が最も簡単になるようにすべきだと論じている．ただこの時点（1922年）では(1)をよりすぐれたものとして採用すべきだとは明言せず，「最も異る諸物体の同じ行動をできるだけ外見的なものとして表現すべきである」という示唆にとどめている．1956年にはカルナップは，ユークリッド幾何学が最も便利なものとして選ばれるであろうという主張に明確に反対し，「この主張はアインシュタインによって歴史的に論破されてしまった．彼は幾何学の単純さを犠牲にしたが，物理学の全体系を相当に単純化した[41]」と述べている．

いかなる幾何学を選ぶべきかについては，ライヒェンバッハも『空間と時間の物理学』において興味深い提言をした．彼は普遍力，差別力という概念を導入する[42]．普遍力とはすべての物体に対し同じ仕方で作用し（物体の位置，方向に依存してもよいが，物体そのものの組成により差があってはならない），またこれを遮断するいかなる絶縁壁も存在しないような力である．それ以外の力，すなわち相手の物質によって作用の仕方の異る力を差別力とよぶ．熱のごときはある物体を大きく膨張させ，他の物体を少ししか膨脹させないから差別力に属する．

ここでライヒェンバッハの用いた有名な例を取り上げよう[43]．この例は幾何学の決定が合同の定義＝計量措定に依存することをも判りやすく示すものである．平行なユークリッド的平面G，Eがある．ただしGはHを中心とする半球状のこぶを中央部に持っている．G上に人間がいてその幾何学を決定しようとしているとする．ある点を中心として円を描き，半径と円周の比を測定すれば，その個所がユークリッド的平面であるかどうかが知られるであろう．Pを中心としPQを半径とする円を描いたとし半径と円周との比を求めてみると，半径はPQで円周は4PQである．よって尺度の長さが不変であると仮定すると直径：円周は



1：πでなく，1：2となり，この領域がユークリッド的平面でないことが判る．ところで円周にそっては尺度の長さを$\frac{\pi}{2}$倍に膨脹させる力が働いているとしょう．するとこの伸びた尺度で測定して円周の長さは2であるから，もとの長さで云えばπだということになる．したがって尺度が半径の方向においては作用を受けず，円周方向においてのみこの膨脹さす力を受けると仮定すると直径：円周は1：πとなり，この中央の領域はユークリッド的平面であるという結論になる．ところで種々な物質で作られた尺度がありうるが，か

かる領域の平面性を示すためには，いかなる種類の尺度に対しても一定の膨脹を生ぜしめる作用を仮定せねばならない．これはライヒェンバッハのいう普遍力に該当する．ところで幾何学を唯一つ選ぶためのライヒェンバッハの原理は普遍力を0に等しいと置くことである．これはもちろんポアンカレの意味での最も便利な幾何学を選ぶための原理であって，最も真なる幾何学はここでもありえない．この原理を用いると普遍力の影響を認めてはならないのだから，Gの中央部では直径：円周はまさに1：2という測定通りなのでありユークリッド的に云えば半球状をなしていることになる．一方平面Eについてはこう述べている：Eに垂直な光が上から差しているとして，Gにおける剛体の尺度のE上への影に等しい長さにE上の尺度は収縮するとする．G上の剛体の尺度は中央部で直径：円周＝1：2を与えるから，その正射影であるE上の尺度も，Gの半球の真下の部分では直径：円周＝1：2を与え，この領域はユークリッド的に云えば平面でなく半球であることを示す．ところがライヒェンバッハはEについての記述をこう始めている，「不思議な力が働いて，E上で移動するすべての尺度の長さをG上の剛体の正射影に等しくなるように変化させると仮定する」．この「不思議な力」はすべての尺度に一様に働くから普遍力である．普遍力＝0の定式を不用意に用い，この「不思議な力」を0にしなければならない，したがってE上の尺度は収縮しないで行動するべきであり，EはH′を中心とする領域でもユークリッド的平面であると解釈するならば，ライヒェンバッハを全く誤解したことになる．ライヒェンバッハの意味する所は，普遍力は働いているにしてもいないにしても（もともと普遍力はすべての物体に一様に作用するから働いているかどうか探知できないものであるが），0に等しいすなわち働いていないとみなさねばならないということである．Eの例で云えば，E上の尺度はある普遍力によって収縮せしめられていると考えてはならず，E上の尺度は剛体的とみなされるべきなのであり，そのすべての尺度が上記のごとき正射影的行動を行った場合，当該領域は尺度のこの行動によって測定されるとおり，まさにユークリッド的半球であるとしなければならないのである．

グリュンバウムは，ライヒェンバッハの『空間と時間の物理学』をきわめて高く評価したが，この書を貫いている普遍力の思想に対しては長い批判を行った[44]．批判の要点は，普遍力は比喩的な概念で，誤解を招きやすく，その上不必要な複雑化をひき起こしている，カルナップの f（$T,\varphi,\lambda,h\cdots$）の定式の方がはるかに透明ですぐれているというものである．普遍力＝0と置くことは上に述べたように尺度を剛体であるとみなすことである．より正確に云えば，温度などの差別力について補正を行った後は固体を剛体とみなし，移動を行っても自己合同を保つとみることの複雑な表現である．カルナップの f（$T,\varphi,\lambda,h\cdots$）において，長さは位置・方向などには従属せず，温度・圧力などだけの関数であると述べるのと等値である．この意味でグリュンバウムの批判は全く当っていないわけではない．しかし普遍力についての誤解は容易に避けうると思われ，その場合には直観性に富んだ興味深い表現といえよう．上述のようにカルナップは「最も異る諸物体の同じ行動をできるだけ外見的なものとして表現すべきである」という原理を立てた．列車が静止し，すべての他の物体が同じ後退行動を取っている——このような場合には表現を変えて逆に列車が前進しているとしなければならない．天動説から地動説への転換もまた同じ原理の実現である．普遍力が働いて異る諸物体がすべて同じ伸縮を受けるという表現が生じた場合，これもまた転換されねばならない．ポアンカレはいかなる場合にも，直線ないし合同の定義を変えてでも，ユークリッド幾何学を保持すべきであると主張した．この保持が最も異様

に思われるのはいかなる場合か，それはこの保持のために普遍力を導入せざるを得ない場合である．この場合はポアンカレに反して普遍力＝０の原理にしたがわねばなるまい．カルナップはライヒェンバッハの普遍力消去の思想を物理学の方法論にとってきわめて興味ある思想であり，さらに人々の注目を集めてしかるべきものだと評したのであった[45]．

（３）

小論の冒頭の間に対する答を中心に総括的に結論を述べよう．空間には数学的空間と物理学的空間がある．本質直観的な空間は存在しない．直接的な私的直観空間には小論は触れなかった．

数学的空間は先天的である．物理学的空間の諸契機のうち，トポロジィ的なものは全く経験的である．射影的性質と計量的性質は，それぞれ直線と合同の規約に依存するが，それが定義されたならば経験的に定められる．計量空間としてのユークリッド空間は，固体を（温度等の補正を施したのち）剛体とみなす通常の合同規約の下では，日常的な物理的環境において妥当する．それゆえ我々はこの環境にもとづく習慣によってユークリッド幾何学的な直観をもち，それが先天的ないし本質的直観であるかに思われる程，身についてしまっているのである．しかし天文学的な領域では重力の存在のために，同じ合同規約の下でユークリッド幾何学は妥当せず，それを保持するためには物理学全体を著しく複雑化せねばならない．いかなる場合にも我々はユークリッド幾何学を保持するというポアンカレの要請ないし予測は，この点で当らなかったといわねばならない．

注

1. I. Kant : Kritik der reinen Vernunft, A20f.＝B34f.
2. Ibid., B160 Anm.
3. Ibid., A24.
4. Ibid., A716＝B744.
5. ライプニッツとカントの対比を特に強調したのはマルチンである．
   s. G. Martin : Klassische Ontologie der Zahl, 1956.
   Immanuel Kant, 3.Aufl. 1960.
6. G.W. Leibniz : Die philosophischen Schriften, ed. C.J. Gerhardt, 1875, VII S.355.
7. Ibid., V S.394.
8. Ibid., VI S. 322f. そこには「物質界の次元の…三という数は最善という理由によって〔神が選択したの〕ではなくて，幾何学的必然による．それは幾何学者が一点で交わる相互に垂直な直線は三つしかないことを証明しうるからである」と書かれているが，実際の証明は行われていない．
9. Kritik der reinen Vernunft, A47＝B65.
10. Immanuel Kant, S.26.
11. Kritik der reinen Vernunft, A713＝B741.
12. のちに述べる形式的空間の概念を用いると，ライプニッツにとっては形式的空間は唯一つしかありえないが，カントにとってはユークリッド空間も非ユークリッド空間も形式空間としては許容されうる．しかし構成可能でない単なる形式空間には，カントは重い意義を認めないということになろう．
13. ニュートン自身の見解は別として，カントはニュートンの絶対空間をこう見たと思われる．
14. Kritik der reinen Vernunft, A39f.＝B56f.
15. 桂寿一：哲学概説，９版，1972年，84ページ以下参照．

16. K. Jaspers : Die großen Philosophen, Erster Band, 1957.
重田訳：カント，1965年，55ページ.
17. R. Carnap : Der Raum (Kant-Studien, Ergänzungsheft 56), 1922, S.5f.
18. R. Wilder : Introduction to the Foundations of Mathematics, 2nd ed., 1967, p.10.
そこでは公理5に，定義される用語「平行」が用いられている.
19. Der Raum, S.6.
20. D. Hilbert : Grundlagen der Geometrie, 7.Aufl. 1930.
寺阪訳：ヒルベルト「幾何学の基礎」，1970年，5ページ以下.
21. 寺阪英孝，ヒルベルト「幾何学の基礎」の解説，1970年，342ページ.
22. The Thirteen Books of Euclid's Elements, translated by T. Heath, 2nd ed., vol.1. 1956, p.155.
23. Der Raum, S.24 にこの鋭い指摘がなされている.
24. Ibid., S.22.
25. A. Grünbaum : Philosophical Problems of Space and Time, 1964, p.152.
26. Der Raum, S.24ff.
27. H. Poincaré : La Science et l'Hypothèse (Bibliothèque de philosophie scientifique, Flammarion) 1920, p.65.
28. Ibid., p.83.
29. H. Reichenbach : The Philosophy of Space and Time (translated by M. Reichenbach 1957), pp. 32ff., 37ff.
30. カルナップ自身1956年には，数学的幾何学と物理学的幾何学の二つについてだけ述べ，この二つの部門のいずれにおいても先天的総合判断は現われない，かくてカントの説は破棄されねばならぬという（ライヒェンバッハの上掲書への Introductory Remarks, p. vi）．『空間論』で直観空間に関する命題は先天的総合判断であると述べている(S.64)のと対比すると，彼が本質直観にもとづく直観空間の思想を放棄し，彼本来の経験論的立場に徹したものと云えよう.
31. Philosophical Problems, p.153.
32. R.K. Luneburg : Mathematical Analysis of Binocular Vision, 1947.
33. La Science et l'Hypothèse, p.69ff.
Poincaré : Science et Méthode, 1920, p.103ff.
34. この個所の指摘はグリュンバウムによる (Philosophical Problems, p. 7).
I.Newton : Principia, ed. by F. Cajori, 1947, p. 6.
35. Kritik der reinen Vernunft, A156=B195.
36. Der Raum, S. 33f.
37. Ibid., S.40ff.
38. グリュンバウムは，Philosophical Problems, p. 144ff. で，この問題を詳細に論じている.
39. La Science et l'Hypothèse, pp. 67, 91, 93.
40. Der Raum, S.57ff.
41. Introductory Remarks, p.v.
42. The Philosophy of Space and Time, p.13 他多数
43. Ibid., p.10f.
44. Philosophical Problems, p. 82ff.
45. Introductory Remarks, p.vii.

Zusammenfassung

Ist die Erkenntnis des Raums apriorisch, empirisch oder statutenmäßig? Kant hielt die Erkenntnis des Raums für das in der reinen Anschauung wurzelnde synthetische Urteil a priori, und glaubte, die Geometrie solle apodiktisch die euklidische von den drei Dimensionen sein. Später unterschied Carnap die drei Raumarten, nämlich den formalen, den Anschauungsraum (die reine Anschauung) und den physikalischen Raum. Aber wir verneinen die selbständige Stellung vom Carnapschen Anschauungsraum; er stammt aus der Gewohnheiten unseres alltäglichen Lebens. Es gibt also nur den formalen oder mathematischen Raum und den physikalischen Raum. Jener ist analytisch und a priori, dieser, der wichtigere, ist aber nicht apriorisch.

Gauß versuchte, es experimentell zu entscheiden, ob der physikalische Raum denn euklidisch oder nichteuklidisch ist, aber bald wurde es gezeigt, daß diese Entscheidung von dem Kurs des Lichts und dem Verhalten des Observationsmeßinstruments (festen Körpers) abhängt. Welche Geometrie dem physikalischen Raum entsprechen soll, ist davon abhängig, wie man die Identität der Strecken definiert. Die Entscheidung der geeigneten Geometrie beruht also auf den Identitätsstatuten. Poincaré hat sich um die Feststellung von diesem Punkt Verdienste erworben. Er sagt: Wahr ist keine Geometrie, sondern es handelt sich bloß um ihre Bequemlichkeit.

Seine folgende Meinung muß aber verbessert werden: Dabei ist die euklidische Geometrie als die bequemste aufzunehmen, darum soll man notwendigenfalls Definitionen der Geraden oder der Streckenidentität korrigieren. Wir behaupten, daß nicht nur die Einfachheit der Geometrie zu verlangen ist, sondern auch eben die der ganzen physikalischen Theorie.