重クォーコニウムのグルーオン崩壊巾

——QCD補正のくりこみ処法依存性　及び，相対論的補正について——

中　川　寿　夫*

Gluonic Decay Width of Heavy Quarkonium

——On Perturbative QCD Calculations and Relativistic Corrections——

Hisao NAKKAGAWA

I　序

最近，重オルソ・クォーコニウムのグルーオン崩壊巾に対して，摂動論的量子色力学（QCD）に基づく next-to-leading order 補正項の計算が遂行された[1]．しかし，この計算結果には，現在の段階で少なくとも2つの不定性が存在し，その故に理論計算の予言が果して何であるのかについての疑問がつきまとっている．不定性の1つは，理論計算の途中で行なわざるをえない，強結合定数 α_s ($\equiv g^2/4\pi$) のくりこみに由来するもので，高次補正項の計算結果はこの「くりこみ処法」という非物理的操作に依存するということである．これは，くりこみ処法（RS）依存性とよばれる[2)-6)]．今1つの不定性は，摂動論的QCDを重クォーコニウムの崩壊過程に適用する為には，この過程を，崩壊をひきおこす短距離力の部分と，クォーク・反クォークが結合して重クォーコニウムを形成する遠距離力の部分とに factorize することが必要であるが，計算結果はこの factorization の処法にも依存することに由来する．これは，factorization 処法（FS）依存性とよばれる[7)-9)]．

クォーコニウム崩壊巾の factorization は，通常

$$\Gamma_g=\frac{160(\pi^2-9)}{81}\alpha_s^3(\mu)\frac{|\phi_{NR}(0)|^2}{M_{q\bar{q}}^2}[1+O(\alpha_s)] \tag{1}$$

という形で，即ち，非摂動的遠距離力の効果をクォーコニウムの非相対論波動関数の原点値という形に factor out することにより遂行される．このFSは（一意的ではないにしても）ある程度の理論的根拠がある[10)]ことを考慮して，以下，FS依存性については眼をつぶることにする．但し，このときは，非相対論極限の波動関数を用いることに対する，相対論的効果からの補正項 $O(v^2/c^2)$ が存在するということは考えに入れる必要がある．更に，FS任意性ということと関連して，この相対論的補正は，一般には考察する過程毎に異なりうるということに注意しよう．通常，この点は考慮されず，種々の崩壊巾の比を考察すれば，この相対論的補正まで含めて，波動関数の効果はキャンセルされると考えられているが，これは一般には正しくない．

従って，以下では，第(1)式に，next-to-leading order の補正をとり入れた場合の，RS依存性の問題を考察し，次いで，クォークの内部運動から予想される相対論的補正について議論してみる．

* 昭和57年9月27日受理

II 崩壊巾に対する2次の表式，及び，その RS 依存性

グルーオン，及び，レプトン崩壊巾 $\Gamma_g, \Gamma_{\mu\mu}$ に対する next-to-leading order（以下2次とよぶ）の表式は，次式で与えられる：

$$\Gamma_g = \Gamma_g^0 [1 + r_1^g \alpha_s(\mu)/\pi], \tag{2a}$$

$$\Gamma_{\mu\mu} = \Gamma_{\mu\mu}^0 [1 + r_1^{\mu\mu} \alpha_s(\mu)/\pi], \tag{2b}$$

但し，

$$\Gamma_g^0 \equiv \frac{160(\pi^2 - 9)}{81} \alpha_s^3(\mu) \frac{|\psi_{NR}(0)|^2}{M_{q\bar{q}}^2}, \tag{3a}$$

$$\Gamma_{\mu\mu}^0 \equiv 16\pi e_q^2 \alpha_{em}^2 \frac{|\psi_{NR}(0)|^2}{M_{q\bar{q}}^2}. \tag{3b}$$

r_1^g，及び $r_1^{\mu\mu}$ の値は既に計算されていて[1),5),11)]，ＲＳとして変形された極小次元くりこみ処法 $(\overline{MS})$[3)] を用い，くりこみ点 μ として $\mu = M_{q\bar{q}}$ ととれば，

$$r_1^g(\Upsilon) = 3.79, \quad r_1^g(J/\psi) = 4.94, \tag{4a}$$

$$r_1^{\mu\mu} = -16/3, \tag{4b}$$

但し，本論文では，常に α_s として4-フレーバーでの値を採用することにする．

以下では，Γ_g と $\Gamma_{\mu\mu}$ との比 R_Γ を問題にすることにすれば，第(2)(3)式より，摂動の2次の表式として次式をうる：

$$R_\Gamma \equiv \frac{\Gamma_g}{\Gamma_{\mu\mu}} = \frac{10(\pi^2 - 9)}{81\pi e_q^2} \frac{\alpha_s^3(\mu)}{\alpha_{em}^2} [1 + r_1 \alpha_s(\mu)/\pi]. \tag{5}$$

但し，2次の係数 r_1 は

$$r_1 = r_1^g - r_1^{\mu\mu} \tag{6}$$

で与えられる．又，このとき，強結合定数 α_s の2次近似での表式は，$a \equiv \alpha_s/\pi$ とかく時，次式の解で与えられる[12)]：

$$\mu \frac{\partial a(\mu)}{\partial \mu} = -b a^2(\mu) [1 + c a(\mu)], \tag{7}$$

即ち，

$$b \ln \frac{\mu}{\tilde{\Lambda}} = -\int_\infty^{a(\mu)} \frac{dx}{x^2(1 + cx)} = \frac{1}{a(\mu)} + c \ln \frac{c a(\mu)}{1 + c a(\mu)}, \tag{8}$$

但し，

$$b \equiv \beta_0/2, \quad c \equiv \beta_1/4\beta_0, \tag{9}$$

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f, \quad \beta_1 = 102 - \frac{38}{3} n_f, \tag{10}$$

であり，上述のように，特にことわらない限り，(10)式において $n_f = 4$ ととる．第(8)式に現われるＱＣＤ尺度 $\tilde{\Lambda}$ は，通常の Λ と

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda (2c/b)^{-c/b} \fallingdotseq 1.118\Lambda \tag{11}$$

でつながっている．くわしい理論的考察，及び，ＲＳ依存性の分析の手順等については，例えば Stevenson[6)] 及び，Nakkagawa-Kawaguchi[13)] を参照せよ．

以下では，ＲＳとして，極小次元化くりこみ処法(ＭＳ)[14)]，$\overline{\text{MS}}$[3)]，運動量引き算くりこみ処法 (ＭＯＭ)[4),5)]，及び，２つの最適化処法，即ち，極小敏感性の原理 (Principle of Minimal Sensitivity, PMS)[6)] 及び，最速収束性の原理 (Principle of Fastest Apparent Convergence, FAC)[15)] に基づく処法，の計５つを考える[16)]．

$\Gamma_g, \Gamma_{\mu\mu}$ の実験値[17)] は keV 単位で，

$$\Gamma_g(\Upsilon) = 27 \pm 7, \quad \Gamma_g(\psi) = 44 \pm 6, \tag{12a}$$

$$\Gamma_{\mu\mu}(\Upsilon) = 1.16 \pm 0.15, \quad \Gamma_{\mu\mu}(J/\psi) = 4.8 \pm 0.6 \tag{12b}$$

であることを用いて，各ＲＳの下で，第(5)式でもってデータを合わせた結果えられるＱＣＤ尺度$\tilde{\Lambda}$は，表1a，1bにかかげた通りである．対応する強結合定数 α_s の値もかかげてある．但し，このときの α_s は，前述のごとく，Υ，J/ψ の両者で共に $n_f=4$ とセットされており，J/ψ 領域ではチャームの質量の効果もとり入れられている．表1a は，くりこみ点 $\mu=M_{q\bar{q}}$ ととった時，表1bは，$\mu=M_{q\bar{q}}/3$ ととった時に対応している．

表1a $\mu=M_{q\bar{q}}$ ととった時のΥ及び J/ψ 領域で決定されるＱＣＤ尺度 $\tilde{\Lambda}$，及び強結合定数 α_s．但し，ＰＭＳ，ＦＡＣについては，$\tilde{\Lambda}$ の値は$\overline{\text{MS}}$基準値を記してある．

RS	$\tilde{\Lambda}$(MeV)		α_s	
	Υ	J/ψ	Υ	J/ψ
MS	78	48	0.129	0.146
$\overline{\text{MS}}$	128	75	0.142	0.161
MOM	227	127	0.161	0.183
PMS	105	58	0.162	0.189
FAC	106	59	0.159	0.186

表1b $\mu=M_{q\bar{q}}/3$ ととった時のΥ及び J/ψ 領域で決定されるＱＣＤ尺度 $\tilde{\Lambda}$，及び強結合定数 α_s．但し，ＭＯＭでは実験値を再現できないので値は記してない．

RS	$\tilde{\Lambda}$(Mev)		α_s	
	Υ	J/ψ	Υ	J/ψ
MS	46	27	0.144	0.164
$\overline{\text{MS}}$	111	60	0.176	0.202
MOM	—	—	——	——
PMS	105	58	0.162	0.189
FAC	106	59	0.159	0.186

ＱＣＤ尺度$\tilde{\Lambda}$の，各ＲＳ間で理論的に予想される比は[4)]

$$\tilde{\Lambda}_{MS} : \tilde{\Lambda}_{\overline{MS}} : \tilde{\Lambda}_{MOM}=1 : 2.656 : 5.734 \tag{13}$$

であることを考慮に入れると，各処法間の整合性は

① $\mu=M_{q\bar{q}}$: PMS, FAC, MOM

② $\mu=M_{q\bar{q}}/3$: $PMS, FAC, \overline{MS}$

の間で，大まかに成立することが予想される[18)]．

表1a，1bから読みとれることで注目すべき点は，i)Υ 及び J/ψ 領域で決定した $\tilde{\Lambda}$ の値の間に矛盾があること．もし，2次近次の表式(2)(3)(5)が十分良く成立しているのであれば，Υ，J/ψ の両領域で決定された $\tilde{\Lambda}$ の値は当然一致していなくてはならない．ii) Υ, J/ψ 両領域での各ＲＳ間の理論的整合性の差． 及び iii) くりこみ点 $\mu=M_{q\bar{q}}$ の場合と $\mu=M_{q\bar{q}}/3$ の場合とでの$\tilde{\Lambda}$及び各ＲＳ間の整合性の差の存在．の３つの点であろう．ここでは主として i) の点について議論をすることとし，第 ii), iii)の点については，別稿の中に含めて論じる予定である[19)]．第 i) の矛盾については，①J/ψ 領域では α_s を $n_f=3$ で定義する，②ψの表式に対してチャーム・クォークの質量効果を無視する，の２つのことを行なえば，若干の改善が可能である．一例として，ＰＭＳの下での $\tilde{\Lambda}$，及び α_s の値を表２にかかげる．これからわかるように依然として若干の矛盾がさけられない上に，上記の①②の変更にはむしろ問題の方が大きい．このように，

表２ J/ψ 領域において α_s を $n_f=3, 4$, 及びチャームの質量の効果を入れた場合，無視した場合の種々の組み合わせの下で決定された $\tilde{\Lambda}$．但し，$\mu=M_{q\bar{q}}$ ととってあり，ＲＳはＰＭＳに固定して，$\tilde{\Lambda}$ は$\overline{\text{MS}}$基準値で記してある．

	$\tilde{\Lambda}$(MeV)		α_s	
	Υ	J/ψ	Υ	J/ψ
$n_f=4$, $m_c\neq0$	105	58	0.162	0.189
$n_f=4$, $m_c=0$	105	64	0.162	0.190
$n_f=3$, $m_c\neq0$	105	85	0.162	0.190
$n_f=3$, $m_c=0$	105	92	0.162	0.190

Υ 及び J/ψ において，互いに矛盾する $\tilde{\Lambda}$ の値をうる，ということの原因がどこにあるかについては，主として２つの理由が考えられる：

a) $\Upsilon, J/\psi$ の両領域では，３次以上の補正項の寄与に差がある．

b) $\Upsilon, J/\psi$ の両領域では，非相対論的波動関数への補正に差がある．

しかし，a) の理由については除外されうる．何故ならば，強結合定数 α_s の値は，両方の領域で共に $O(0.1)$，例えばＰＭＳでは，

$$\alpha_s^{PMS}(\Upsilon)=0.162,\quad \alpha_s^{PMS}(J/\psi)=0.189$$

であり，３次以上の補正項は両者共に差がない，と考えられるからである．一方 b)，については $M_\Upsilon=9.458\,\mathrm{GeV}$，$M_{J/\psi}=3.095\,\mathrm{GeV}$ という事実から両者の間で相対論的補正は差が大きいことが予想される．これについては，次節で論じる．

又，表１，２からわかる通り，ＰＭＳ，ＦＡＣは，正に出発点とされた計算処法によらない一定の結果を与えていることが理解できる．特に注意すべきは表２，であり，どのような組みあわせに対しても，α_s の値は常に同じ値を与えていることは重要である．

Ⅲ　非相対論的波動関数への補正について

第Ⅱ節で論じたように，第(1)式の形の factorization を仮定し，あとは摂動論的ＱＣＤの補正のみで，重クォーコニウムのグルーオン崩壊巾が説明できる（即ち第(2)(3)式）という仮定は，少なくとも $\Upsilon, J/\psi$ 両領域の間では矛盾をきたす．これに対する最も妥当な解決は(1)式の形の factorization を仮定した場合，$J/\psi, \Upsilon$ 両領域では．$|\psi_{NR}(0)|$ への相対論的運動学からくる補正（以下これを相対論的補正とよぶ）にかなりの差異が存在する，と考えることである．これは，ＦＳ任意性ということが，考察する物理的過程に依存するということとも関連している．この節では，この考えに基づいて，相対論的補正の大きさ等について論じてみる．

摂動論的考察によれば，クォーコニウム内のクォークの相対運動の速さを v とするとき，$v^2/c^2\approx\alpha_s^2$ であるが，ポテンシャル・モデルの計算によれば，この項は「とじこめ」の効果によりずっと大きくなることが示されている．そこで以下 Mackenzie-Lepage[1] に従がって次の形でＱＣＤ補正及び，相対論的補正を，同時にとり扱ってみる：

$$R_\Upsilon\equiv\frac{\Gamma_g}{\Gamma_{\mu\mu}}=\frac{10(\pi^2-9)}{81\pi e_q^2}\,\frac{\alpha_s^3(\mu)}{\alpha_{em}^2}\left[1+r_1\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}+C\langle v^2/c^2\rangle\right],\tag{14}$$

但し，C はパラメータであり，実験から決めることにする．$\langle v^2/c^2\rangle$ の値については，ポテンシャル・モデルの値を用いることにすれば[20]

$$\langle v^2/c^2\rangle=\begin{cases}0.23 & \text{for } J/\psi(3097)\\ 0.077 & \text{for } \Upsilon(9458).\end{cases}\tag{15}$$

第(14)式でもって，$\Upsilon, J/\psi$ 両領域の実験値を合わせることで我々はＱＣＤ尺度 $\tilde{\Lambda}$，及び C の値を各ＲＳに対して決定できる．この結果をもとにして，相対論的補正

$$\Delta R_{R.C.}\equiv C\langle v^2/c^2\rangle/[1+r_1\alpha_s(\mu)/\pi+C\langle v^2/c^2\rangle]\tag{16}$$

を求めることができる．これらを表３に与えてある．

この結果は，いくつかの興味ある事実を教えてくれる： i) C の値のＲＳ依存性， ii) Υ に対する $\Delta R_{R.C.}$ の安定性，及び iii) ψ に対する $\Delta R_{R.C.}$ の大きさ，と不安定性，等である．以下順次これらの点について簡単に考察を加えてみよう．

i) について：ＱＣＤの２次近似の表式の不安定性の反映であり，このことは，ＲＳ依存性が非常に重要な現象論的効果を及ぼしていることを意味するものである．と共に，ＦＳ任意性も，ここに反映していると考えられる．

表3　相対論的補正を入れた表式(14)で決定されるQCD尺度 $\tilde{\Lambda}$, C, 及び Υ, J/ψ の両領域での相対論的補正の大きさ．但し，$\mu=M_{q\bar{q}}$ ととってある．

RS	$\tilde{\Lambda}$ (MeV)	C	$\lvert\Delta R_{R.C.}\rvert$	
			Υ	J/ψ
MS	106	−4.6	0.223	0.893
$\overline{\mathrm{MS}}$	177	−3.8	0.252	1.114
MOM	314	−2.6	0.260	1.337
PMS	139	−2.2	0.219	1.253
FAC	141	−2.4	0.229	1.277

ii)　について：i) の事実にもかかわらず，Υ 領域では $\Delta R_{R.C.}$ はRSに殆んどよらずに一定で，

$$|\Delta R_{R.C.}(\Upsilon)|\simeq 0.22-0.26, \qquad (17)$$

即ち，相対論的補正の大きさは，ほぼ20数％程度であることを示している．これは，Υ 領域での摂動論的QCD計算の有効性の証明としても重要である．

iii)　について：一方 J/ψ 領域では $\Delta R_{R.C.}$ はきわめて大きく，かつRSに大きく依存し，

$$|\Delta R_{R.C.}(J/\psi)|\simeq 0.90-1.34. \qquad (18)$$

このことは，第(1)式の形の factorization を想定した場合，J/ψ 領域ではQCD補正などよりも，むしろ相対論的補正の方が重要であることを意味するものであり，より広くいえば，J/ψ 領域では factorization の任意性は非常に重要な効果をもたらすことを意味する．

更に，加えてコメントしておくべきことは，本節の解析は，第(5)式のような形での解析に対して，factorization の任意性を第(14)式という特殊な形ではあるにせよとり入れて，RS依存性とあわせ考えて分析を進めたものである，という点である．相対論的補正を考えに入れない場合と，入れた場合との両者の解析により決定された強結合定数 α，や，QCD尺度 $\tilde{\Lambda}$ の値にかなりの差異がある，ということは重要である．この事実は，重クォーコニウムの分析においては，FS依存性の問題を，ここで行なったように相対論的補正という形で行なうか否かは別として，もう少し真剣に考える必要のあることを示している．

Ⅳ　む　す　び

本稿では，重クォーコニウム，特に Υ (9458) 及び J/ψ(3097)のグルーオン崩壊巾に対する，摂動論的QCDの２次の計算結果について，RS依存性の解析を行ない，５つのRS（MS，$\overline{\mathrm{MS}}$，MOM，PMS，FAC）間の理論的整合性を，各RSで実験から決められたQCDの尺度 $\tilde{\Lambda}$ の値の関係を調べることで，粗い議論を展開してみた．又，この尺度を Υ, J/ψ の両領域で決定してみて，相互に矛盾のあることをみた．これは，Υ 及び J/ψ の結果は，単に，強結合定数を，くりこみ群の方程式に従って発展させただけでは説明できないことを意味している．

この矛盾は，Υ 及び J/ψ の間では，factorization (1)の仮定の下では，非相対論的波動関数の原点値に対する相対論的補正に大きい差が存在しうる，ということで解決できることをみたが，その結果は，当の相対論的補正の大きさが，Υ ではRSに殆んどよらずに20数％であるのに対し，J/ψ では100％を越すと共にRSにもかなり依存するというものであった．J/ψ に対するこの結果は，本稿での議論の粗さから考えて，数値的にそのまま信用できない面があるとしても，factorization (1)に対する，あるいはもっと広くFS依存性に関する，１つの問題提起たりうるであろう．

以上をふまえて，残された問題として

A）議論の精密化，

B）重クォーコニウムの崩壊巾の計算に対するFS依存性の一般的考察，

の２つが考えられる．Aについては現在進行中であり，Bについても調べてみる予定である．猶，この重クォーコニウムのグルーオン崩壊過程の計算を通じて，QCDの結合定数

α_s に対する情報を引き出したり，又，上記A，Bの２つの問題の進展の為にも，Υ 及び J/ψ，更により重いクォーコニウムの崩壊についての精密かつ広範な測定が強く望まれることを付言しておく．

References and Footnotes

1. P. B. Mackenzie and G. P. Lepage, Phys. Rev. Letters **47** (1981) 1244; *AIP Conference Proceedings on Perturbative QCD* (ed. D. W. Duke and J. F. Owens, Tallahassee, 1981), p. 176.
2. See, e. g., A. J. Buras, *Proc. 1981 International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies* (ed. W. Pfeil, Bonn, 1981), p. 636, and references therein.
3. W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke and T. Muta, Phys. Rev. **D18** (1978) 3998.
4. W. Celmaster and R. J. Gonsalves, Phys. Rev. Letters **42** (1979) 1435; Phys. Rev. **D20** (1979) 1420.
5. W. Celmaster and D. Sivers, Phys. Rev. **D23** (1981) 227.
6. P. M. Stevenson, Phys. Letters **100B** (1981) 61; Phys. Rev. **D23** (1981) 2916.
7. W. Celmaster and D. Sivers, ANL-HEP-PR-80-61 (1980); ANL-HEP-PR-81-19 (1981).
8. H. D. Politzer, Nucl. Phys. **B194** (1982) 492.
9. H. Nakkagawa and A. Niégawa, Phys. Letters **119B** (1982) 415; OCU-97 (1982).
10. R. van Royen and V. F. Weisskopf, Nuovo Cimento **50** (1961) 617.
11. R. Barbieri, R. Gatto, R. Kogerler and Z. Kunszt, Phys. Letters **57B** (1975) 455.
12. $\alpha_s^{(0)}(\mu)=4\pi/\beta_0 \ln(\mu^2/\mu^2)$ で再展開した式
$$\alpha_s(\mu)=\alpha_s^{(0)}(\mu)\left[1-\frac{\beta_1}{\beta_0{}^2}\ln\ln\frac{\mu^2}{\tilde{\Lambda}^2}\right]$$
と多少の差があるが，以下の分析に大した効果は及ぼさない．
13. H. Nakkagawa and T. Kawaguchi, Prog. Theor. Phys. **68** (1982) 589.
14. G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B61** (1973) 455.
15. G. Grunberg, Phys. Letters **95B** (1980) 70.
16. 類似の解析は Mackenzie and Lepage, Ref. 1, でも行なわれている．
17. R. D. Schamberger, *Proc. 1981 International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies* (ed. W. Pfeil, Bonn, 1981) p. 217; K. Berkelman, *Proc. XX International Conference on High Energy Physics* (ed. L. Durand and L. G. Pondrom, Madison, 1980) p. 1499.
18. この点については，Deep Inelastic Scattering の構造関数に対して行なった分析，Nakkagawa and Kawaguchi, Ref. 13, の手順に従ってもう少し厳密な整合性の議論ができる．このことについては別に論じる予定である (Ref. 19).
19. H. Nakkagawa and T. Kawaguchi, in preparation.
20. W. Buchmüller and S.-H. H. Tye, Phys. Rev. **D24** (1981) 132.

Summary

We made the consistency analysis of the renormalization scheme (RS)-dependence in perturbative QCD calculation of the gluonic decay width of heavy quarkonium, especially of Υ(9458) and of J/ψ(3097). Our findings are that i) higher order contributions might always be important from a view point of theoretical consistency, and that ii) in any known RS, there is a discrepancy between the Υ and J/ψ results. Standing on these observations we next studied the correction to the non-relativistic wave function of

heavy quarkonium due to the relativistic kinematics, and found the followings; at Υ region this correction is almost independent of RS's and contributes roughly 25% to the total gluonic decay width, whereas at J/ψ region the relativistic correction becomes untolerably large and also depends on RS's. This analysis indicates the necessity of careful investigation of the factorization scheme-ambiguity in the decay processes of heavy quarkonia.